



Paper Type: Original Article



Efficiency Analysis under Data Scarcity: Developing an Uncertainty-Based Modified Russell Model for Evaluating Agricultural Investment Opportunities

Ali Mahmoodirad^{1,*}, Masoud Sanei² , Mohammad Adabitabar Firozjah¹

¹ Department of Mathematics, Babol Branch, Islamic Azad University, Babol, Iran; ali.mahmoodirad@iau.ac.ir; m.adabitabar@iau.ac.ir.

² Department of Mathematics, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran; masoud.sanei@iau.ir.

Citation:



Mahmoodirad, A., Sanei, M., & Adabitabar Firozjah, M. (2026). Efficiency analysis under data scarcity: Developing an uncertainty-based modified russell model for evaluating agricultural investment opportunities. *Management: Modeling, Analysis and Applications*, 3(1), 31-41.

Received: 17/10/2025

Reviewed: 22/11/2025

Revised: 25/12/2025

Accepted: 15/02/2026

Abstract

Purpose: Efficiency evaluation is a key instrument for optimal resource allocation and decision support in the agricultural sector. However, many real-world problems are characterized by limited historical data, incomplete information, and a strong reliance on expert judgment, restricting the applicability of conventional Data Envelopment Analysis (DEA) models. Although several studies have extended DEA models to uncertain environments, the application of the Modified Russell Measure in uncertainty theory, based on belief degrees, has received limited attention. Therefore, this study aims to develop an efficiency evaluation framework for uncertainty-driven environments and apply it to assess the potential for Paulownia tree cultivation in Mazandaran Province.

Methodology: This study extends the Modified Russell DEA model using uncertainty theory. Inputs and outputs were modeled as uncertain variables represented by degrees of belief, and the uncertainty model was transformed into an equivalent deterministic formulation using the expected-value criterion. Efficiency scores were then calculated by solving the resulting model. To validate the proposed framework, 12 regions of Mazandaran Province were considered Decision-Making Units (DMUs), and labor, machinery utilization, timber yield, and oxygen production were used as evaluation indicators.

Findings: The results demonstrate that the proposed model provides effective assessments of efficiency in situations where precise data are unavailable. Among the twelve evaluated regions, Ramsar, Tonekabon, Chalous, Noor, and Amol were identified as efficient units. These regions achieved superior performance in timber production and oxygen generation with given input levels. The findings further reveal that approximately 42% of the evaluated regions meet the efficiency and capacity requirements for Paulownia cultivation and can serve as benchmark locations for future agricultural development initiatives.

Originality/Value: This study introduces a novel framework that integrates the Modified Russell DEA model with uncertainty theory based on degrees of belief. Its primary contribution lies in providing a decision-support tool for situations characterized by insufficient historical information and reliance on expert assessments. Beyond agricultural applications, the proposed framework can be utilized in investment evaluation, regional planning, and a wide range of managerial decision-making contexts involving uncertainty.

Keywords: Data envelopment analysis, Modified Russell measure, Uncertainty theory, Degree of belief, Expected value.



Corresponding Author: ali.mahmoodirad@iau.ac.ir



<https://doi.org/10.22105/mmaa.v3i1.119>



Licensee. **Management: Modeling, Analysis and Application**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



۶

نوع مقاله: پژوهشی

تحلیل کارایی در شرایط کمبود داده: توسعه مدل راسل اصلاح شده مبتنی بر نظریه عدم قطعیت برای ارزیابی فرصت های سرمایه گذاری کشاورزی

علی محمودی راد^{۱*}، مسعود صانعی^۲، محمد ادبی تبار فیروز جا^۱

^۱ گروه ریاضی، واحد بابل، دانشگاه آزاد اسلامی، بابل، ایران.

^۲ گروه ریاضی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

چکیده

هدف: ارزیابی کارایی یکی از ابزارهای کلیدی برای تخصیص بهینه منابع و پشتیبانی از تصمیم گیری در بخش کشاورزی است. با این حال، بسیاری از مسایل واقعی با کمبود داده های تاریخی، عدم دسترسی به اطلاعات دقیق و اتکای گسترده به قضاوت خبرگان مواجه هستند که کاربرد مدل های متعارف تحلیل پوششی داده ها^۱ را محدود می سازد. اگرچه مطالعات متعددی به توسعه مدل های *DEA* در محیط های غیرقطعی پرداخته اند، بهره گیری از مدل راسل اصلاح شده در چارچوب نظریه عدم قطعیت مبتنی بر درجه باور کمتر مورد توجه قرار گرفته است. از این رو، پژوهش حاضر با هدف توسعه یک مدل ارزیابی کارایی برای محیط های مبتنی بر عدم قطعیت و کاربرد آن در ارزیابی ظرفیت کشت درخت پالونیا در استان مازندران انجام شد.

روش شناسی پژوهش: در این پژوهش، مدل راسل اصلاح شده در *DEA* با استفاده از نظریه عدم قطعیت توسعه یافت. ورودی ها و خروجی ها به صورت متغیرهای عدم قطعیت مبتنی بر درجه باور مدل سازی شدند و با بهره گیری از معیار مقدار مورد انتظار، مدل عدم قطعیت به یک مدل قطعی معادل تبدیل گردید. سپس کارایی واحدهای تصمیم گیرنده^۲ از طریق حل مدل حاصل محاسبه شد. برای اعتبارسنجی چارچوب پیشنهادی، دوازده منطقه از استان مازندران به عنوان *DMUs* در ارزیابی ظرفیت کشت درخت پالونیا مورد بررسی قرار گرفتند و شاخص های نیروی کار، ماشین آلات، عملکرد چوب و تولید اکسیژن در تحلیل لحاظ شدند.

یافته ها: نتایج نشان داد مدل پیشنهادی توانایی مناسبی در ارزیابی کارایی تحت شرایط نبود داده های قطعی دارد. از میان دوازده منطقه مورد بررسی، پنج منطقه شامل رامسر، تنکابن، چالوس، نور و آمل به عنوان واحدهای کارا شناسایی شدند. این مناطق با سطح مشخصی از منابع ورودی توانسته اند عملکرد بالاتری از نظر تولید چوب و تولید اکسیژن ایجاد کنند. یافته ها همچنین نشان داد حدود ۴۲٪ از مناطق مورد بررسی برای توسعه کشت پالونیا از ظرفیت و کارایی مناسب برخوردار هستند و می توانند به عنوان مناطق مرجع برای توسعه این فعالیت در نظر گرفته شوند.

اصالت/ارزش افزوده علم: این پژوهش با تلفیق مدل راسل اصلاح شده و نظریه عدم قطعیت مبتنی بر درجه باور، چارچوبی جدید برای ارزیابی کارایی در محیط های فاقد داده های دقیق ارائه می کند. ارزش اصلی مطالعه در فراهم کردن ابزاری تصمیم یار برای شرایطی است که اطلاعات تاریخی ناکافی بوده و تصمیم گیری ناگزیر بر مبنای قضاوت کارشناسان انجام می شود. چارچوب پیشنهادی علاوه بر کاربرد در بخش کشاورزی، قابلیت استفاده در ارزیابی پروژه های سرمایه گذاری، برنامه ریزی منطقه ای و سایر حوزه های مدیریتی دارای عدم قطعیت را نیز داراست.

کلیدواژه ها: تحلیل پوششی داده ها، اندازه راسل اصلاح شده، تئوری نایقینی، درجه باور، مقدار مورد انتظار.

۱- مقدمه

DEA که توسط چارلز و همکاران [۱] آغاز شد و به عنوان مدل *CCR* شناخته می شود، یک رویکرد ناپارامتری برای تعیین کارایی *DMUs* همگن است. علاوه بر این، بنکر و همکاران [۲] مدل *CCR* را اصلاح کرده و مدل *BCC* را معرفی کردند. *DEA*، *DMU* ها را به دو دسته کارا و ناکارآمد طبقه بندی می کند. اگر یک *DMU* روی مرز کارا قرار گیرد، کارا و در غیر این صورت ناکارا است.

^۱ Data Envelopment Analysis (DEA)

^۲ Decision-Making Units (DMUs)

روش‌های مختلفی برای محاسبه امتیاز کارایی DMU ها وجود دارد؛ مانند مدل CCR [1]، مدل BCC [2]، مدل جمعی [3]، مدل FDH [4]، مدل راسل اصلاح‌شده [5] و مدل SBM [6]. در این تحقیق، از مدل راسل اصلاح‌شده استفاده خواهیم کرد که در مورد داده‌های قطعی، معادل مدل SBM است.

در مدل‌های مرسوم DEA ، فرض بر این است که داده‌های ورودی و خروجی قطعی هستند، درحالی‌که در برخی از مسایل عملی، ورودی‌ها و خروجی‌های DMU ها دایما در حال تغییر هستند. در فقدان فراوانی برای ورودی‌ها و خروجی‌ها، استفاده از یک مدل DEA قطعی ممکن است منجر به نتایج نامطلوب و غیرمنطقی شود [7]. اگر اطلاعات تاریخی کافی در مورد این پارامترها وجود داشته باشد، می‌توان آن‌ها را به‌عنوان متغیرهای تصادفی در نظر گرفت و توزیع احتمال آن‌ها را به‌دست آورد؛ بنابراین، گاهی اوقات به دلیل کمبود داده‌های تاریخی یا نامعتبر بودن آن‌ها، یا عواملی مانند شرایط آب و هوایی، تصادف‌های ناگهانی و ازدحام جمعیت، توزیع احتمال این پارامترها در دسترس نیست. در این موارد، معمولاً از متخصصان برای ارزیابی درجه باوری که ممکن است برای هر رویداد رخ دهد، برای توصیف این پارامترها استفاده می‌شود. در این حالت، می‌توان از نظریه عدم قطعیت که توسط لیو در سال ۲۰۰۷ معرفی و توسط خودش در سال ۲۰۱۰ [8] اصلاح شد، برای مقابله با درجه باور استفاده کرد. درجه باور به‌شدت به نظر متخصص در مورد رویدادی که اتفاق می‌افتد بستگی دارد؛ بنابراین، وقتی نظر متخصص تغییر می‌کند، درجه باور نیز تغییر می‌کند.

بسیاری از محققان، DEA را با نظریه نایقینی ادغام کرده‌اند تا بر ناکارآمدی آن بر روی داده‌های نایقینی غلبه کنند. داده‌های نایقینی می‌توانند خطاهایی را در تکامل کارایی ایجاد کنند. اولین مدل DEA نایقینی با ورودی‌ها و خروجی‌های نایقینی توسط ون و همکاران [9] پیشنهاد شد. آن‌ها از نظریه نایقینی برای ساخت مدل DEA جمعی نایقینی استفاده کردند و ون [10] سپس مدل‌های DEA مختلفی را با ورودی‌ها و خروجی‌های نایقینی توسعه داد. سپس ون و همکاران [11] حساسیت و پایداری مدل DEA جمعی نایقینی را مطالعه کردند. محمد نژاد و غفاری-حدیقه [7] مدل جدیدی را برای یافتن راه‌حلی با بالاترین درجه باور مبنی بر اینکه DMU ارزیابی شده به‌عنوان کارا شناخته می‌شود، ارائه دادند.

جیانگ و همکاران [12] مدل DEA نایقینی برای ارزیابی کارایی مقیاس DMU ها با ورودی‌ها و خروجی‌های نایقینی پیشنهاد کردند. علاوه بر این، آن‌ها تحلیل حساسیت و پایداری مدل پیشنهادی را برای کارایی مقیاس، تجزیه و تحلیل کردند. لیو و لیو [13] مدل DEA نایقینی CCR جدید را برای ارزیابی کارایی DMU ها با ورودی‌ها و خروجی‌های نایقینی معرفی کردند و تحلیل حساسیت و پایداری DMU ها را در مدل خود تجزیه و تحلیل کردند.

جمشیدی و همکاران [14] مدل DEA راسل را توسعه دادند که در آن ورودی‌ها و خروجی‌های نایقینی، عدم قطعیت مبتنی بر درجه باور هستند. آن‌ها دو مدل DEA نایقینی پیشنهاد کردند: ارزش مورد انتظار و مدل وابسته به محدودیت شانس و آن را برای ارزیابی شعب بانک‌های ایران به‌کاربردند. جمشیدی و همکاران [15] مدل‌های تخصیص با هزینه‌های ورودی و قیمت‌های خروجی نایقینی را بر اساس درجه باور بررسی کردند. سپس، مدل آنتروپی نایقینی به‌عنوان تابع هدف دوم استفاده شد. یک مدل DEA با رویکرد BCC نایقینی برای ارزیابی کارایی DMU ها با ورودی‌ها و خروجی‌های نایقینی توسط جمشیدی و همکاران [16] استفاده شده است. جمشیدی و همکاران [17] مدل DEA با رویکرد SBM نایقینی را با ورودی‌ها و خروجی‌های نایقینی بر اساس درجه باور نظریه عدم قطعیت توسعه دادند. محمودی راد و همکاران [18] مدل DEA با رویکرد SBM نایقینی که در آن ورودی‌ها و خروجی‌ها بر اساس درجه‌های باور از نوع زیگزاگ بودند را توسعه دادند و برخی از ویژگی‌های این مدل را در حالت نایقینی اثبات و تحلیل حساسیت و پایداری DMU ها را در مدل خود بررسی کردند.

تا آنجا که ما می‌دانیم تحقیقی در زمینه DEA با ورودی‌ها و خروجی‌های نایقینی با مدل راسل اصلاح‌شده وجود ندارد؛ بنابراین، ما از نظریه نایقینی مبتنی بر درجه باور برای توسعه مدل راسل اصلاح‌شده برای کارایی DMU در صنعت کشاورزی استفاده می‌کنیم.

ساختار مقاله به این شرح است که در ادامه بیان می‌گردد. در بخش ۲ به معرفی برخی مفاهیم تئوری نایقینی می‌پردازیم. مدل راسل اصلاح‌شده در حالت قطعی در بخش ۳ معرفی شده است. در بخش ۴ مدل راسل اصلاح‌شده نایقینی و روش حل آن آمده است. در بخش ۵ مورد مطالعاتی در بخش کشاورزی ارائه شده است و بالاخره نتیجه‌گیری در بخش ششم آمده است.

۲- تئوری عدم قطعیت

در این بخش برخی از تعاریف، مفاهیم مقدماتی و نمادهای تئوری عدم قطعیت که در این مقاله مورد نیاز است را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱ ([8]) - فرض کنید L یک σ - جبر روی مجموعه غیر تهی Γ باشد. تابع مجموعه‌ای M یک اندازه عدم قطعیت نامیده می‌شود هرگاه در اصول زیر صدق کند:

$$1. \quad M\{\Gamma\} = 1.$$

$$2. \quad \text{برای هر } \Lambda \in L \text{ داشته باشیم: } M\{\Lambda\} + M\{\Lambda^c\} = 1.$$

$$3. \quad \text{برای هر دنباله شمارا } \{\Lambda_i\} \in L \text{ داشته باشیم } M\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i\right\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} M\{\Lambda_i\}.$$

سه تایی (Γ, L, M) فضای عدم قطعیت و هر عنصر Λ در L یک پیشامد نامیده می‌شود. به منظور به دست آوردن یک اندازه عدم قطعیت از پیشامدها، اندازه عدم قطعیت ضرب، توسط لئو [8] به صورت زیر تعریف شده است:

۴. فرض کنید (Γ_k, L_k, M_k) برای $k = 1, 2, \dots$ فضاهای عدم قطعیت باشند. اندازه عدم قطعیت ضربی M یک اندازه عدم قطعیت است هرگاه در شرط زیر صدق کند:

$$M\left\{\prod_{k=1}^{\infty} \Lambda_k\right\} = \prod_{k=1}^{\infty} M_k\{\Lambda_k\},$$

که Λ_k پیشامدهای دلخواه از L_k برای $k = 1, 2, \dots$ هستند.

تعریف ۲ ([8]) - متغیر عدم قطعیت ξ یک تابع اندازه‌پذیر از فضای عدم قطعیت (Γ, L, M) به مجموعه اعداد حقیقی تعریف می‌شود، یعنی برای هر مجموعه بورل B از اعداد حقیقی، مجموعه زیر یک پیشامد است:

$$\{\xi \in B\} = \{\gamma \in \Gamma \mid \xi(\gamma) \in B\}.$$

تعریف ۳ ([8]) - توزیع عدم قطعیت Φ از متغیر عدم قطعیت ξ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi(x) = M\{\xi \leq x\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

تعریف ۴ ([8]) - فرض کنید ξ یک متغیر عدم قطعیت باشد. مقدار مورد انتظار ξ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E[\xi] = \int_0^{\infty} M\{\xi \geq r\} dr - \int_{-\infty}^0 M\{\xi \leq r\} dr.$$

به شرط آنکه حداقل یکی از دو انتگرال بالا متناهی باشد.

تعریف ۵ ([8]) - یک توزیع عدم قطعیت $\Phi(x)$ منظم نامیده می‌شود اگر آن نسبت به x تابعی پیوسته و اکیدا صعودی که $0 < \Phi(x) < 1$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1$.

واضح است که توزیع عدم قطعیت منظم $\Phi(x)$ ، تابع وارون روی دامنه x دارد که $0 < \Phi(x) < 1$ و تابع وارون، $\Phi^{-1}(\alpha)$ ، روی بازه $(0, 1)$ وجود دارد.

تعریف ۶ ([8]) - متغیر عدم قطعیت ξ روی فضای عدم قطعیت (Γ, L, M) مثبت نامیده می‌شود هرگاه $M\{\xi \leq 0\} = 0$.

تعریف ۷ ([8]) - متغیرهای عدم قطعیت $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ مستقل نامیده می شوند هرگاه

$$M\left\{\bigcap_{i=1}^n (\xi_i \in B_i)\right\} = \prod_{i=1}^n M\{\xi_i \in B_i\}.$$

برای مجموعه های بول $B_1, B_2, \dots, B_n$ از اعداد حقیقی.

قضیه ۱ ([8]) - فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ متغیرهای عدم قطعیت مستقل به ترتیب با توزیع عدم قطعیت منظم $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ باشند. اگر تابع $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ نسبت به $x_1, x_2, \dots, x_m$ اکیدا صعودی و نسبت به $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ اکیدا نزولی باشد، آن گاه متغیر عدم قطعیت $\xi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ دارای توزیع عدم قطعیت معکوس دارد و عبارت است از:

$$\Psi^{-1}(\alpha) = f\left(\Phi_1^{-1}(\alpha), \dots, \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1-\alpha), \dots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha)\right).$$

تعریف ۸ ([8]) - فرض کنید ξ متغیر عدم قطعیت با توزیع عدم قطعیت منظم $\Phi(x)$ باشد. اگر مقدار مورد انتظار موجود باشد، آن گاه $E[\xi] = \int_0^1 \Phi^{-1}(\alpha) d\alpha$ که $\Phi^{-1}(\alpha)$ توزیع عدم قطعیت معکوس ξ است.

قضیه ۲ ([8]) - فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ متغیرهای عدم قطعیت مستقل به ترتیب با توزیع عدم قطعیت منظم $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ باشند. اگر تابع $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ نسبت به $x_1, x_2, \dots, x_m$ اکیدا صعودی و نسبت به $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ اکیدا نزولی باشد، آن گاه متغیر عدم قطعیت $\xi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ دارای مقدار مورد انتظار زیر است:

$$E[\xi] = \int_0^1 f\left(\Phi_1^{-1}(\alpha), \dots, \Phi_m^{-1}(\alpha), \Phi_{m+1}^{-1}(1-\alpha), \dots, \Phi_n^{-1}(1-\alpha)\right) d\alpha.$$

قضیه ۳ ([8]) - فرض کنید ξ و η متغیرهای عدم قطعیت مستقل با مقادیر مورد انتظار متناهی باشند. آن گاه برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$E[a\xi + b\eta] = aE[\xi] + bE[\eta]$$

تعریف ۹ ([8]) - متغیر عدم قطعیت ξ ، زیگزاگ نامیده می شود، اگر توزیع عدم قطعیت زیگزاگ زیر را داشته باشد:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{2(b-a)}, & a \leq x \leq b, \\ \frac{x+c-2b}{2(c-b)}, & b \leq x \leq c, \\ 1, & x \geq c. \end{cases}$$

در این صورت آن را با $Z(a, b, c)$ نشان می دهیم که $a < b < c$ اعداد حقیقی هستند.

واضح است که متغیر عدم قطعیت زیگزاگ منظم است. توزیع عدم قطعیت معکوس متغیر عدم قطعیت زیگزاگ $Z(a, b, c)$ برابر است با:

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \begin{cases} (1-2\alpha)a + 2ab, & \alpha < 0.5, \\ (2-2\alpha)b + (2\alpha-1)c, & \alpha \geq 0.5. \end{cases}$$

مقدار مورد انتظار متغیر عدم قطعیت زیگزاگ $Z(a, b, c)$ برابر است با $E[\xi] = \frac{a+2b+c}{4}$.

قضیه ۴ ([8]) - فرض کنید ξ یک متغیر عدم قطعیت با توزیع عدم قطعیت پیوسته Φ باشد. آن گاه برای هر x داریم:

$$\mathcal{M}\{\xi \leq x\} = \Phi(x).$$

$$\mathcal{M}\{\xi \geq x\} = 1 - \Phi(x).$$

۳- مدل راسل اصلاح شده

فرض کنید n واحد تصمیم گیرنده ($DMU_k, k = 1, 2, \dots, n$) که هر کدام دارای m ورودی $X_k = (x_{1k}, \dots, x_{mk})$ برای تولید s خروجی $Y_k = (y_{1k}, \dots, y_{sk})$ در اختیار باشد. مدل راسل اصلاح شده (ERGM) برای ارزیابی DMU_o به صورت زیر است [5]:

$$\min \theta = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \gamma_r} \quad (1)$$

s.t.

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_{ik} \leq \theta_i x_{io}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k y_{rk} \geq \gamma_r y_{ro}, \quad r = 1, 2, \dots, s,$$

$$\lambda_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\theta_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\gamma_r \geq 1, \quad r = 1, 2, \dots, s.$$

در مدل (۱) ρ^* (مقدار بهینه مدل (۱)) به عنوان نسبت میانگین ورودی‌های تعدیل شده (کاهش یافته) به میانگین خروجی‌های تعدیل شده (افزایش یافته) تفسیر می‌شود. هرچه ρ به ۱ نزدیک تر باشد، واحد کارا تر است، زیرا به تنظیمات کمتری در ورودی‌ها و خروجی‌ها نیاز دارد؛ بنابراین، $0 < \rho^* \leq 1$ نسبت به انتقال پایا است واحدها ثابت هستند [5].

تعریف ۱۰ ([5]) DMU_o در مدل (۱) کارا نامیده می‌شود اگر و فقط اگر $\rho^* = 1$ که ρ^* مقدار بهینه مدل (۱) است.

۴- مدل عدم قطعیت ERGM

در این بخش برای اندازه‌گیری کارایی DMU با ورودی‌ها و خروجی‌های عدم قطعیت، مدل‌های عدم قطعیت ERGM (UERGM) ارائه و کارایی این مدل‌ها نشان داده می‌شود. مشابه با مدل کلاسیک ERGM، تابع هدف در مدل UERGM، به صورت قطعی است.

۴-۱- مدل مقدار انتظار UERGM

لیو [8] عملگر مقدار انتظار را برای متغیر عدم قطعیت و مدل مقدار انتظار را پیشنهاد کرد. ایده اصلی مدل مقدار مورد انتظار، بهینه کردن مقدار انتظار تابع هدف تحت شرایط مورد انتظار است. در نتیجه با استفاده از عملگر مقدار مورد انتظار، مدل UERGM برای ارزیابی DMU_o به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$\min \theta = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \gamma_r} \quad (2)$$

s.t.

$$E \left[\sum_{k=1}^n \lambda_k \tilde{x}_{ik} - \theta_i \tilde{x}_{io} \right] \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$E \left[\sum_{k=1}^n \lambda_k \tilde{y}_{rk} - \gamma_r \tilde{y}_{ro} \right] \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, s,$$

$$\lambda_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\theta_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\gamma_r \geq 1, \quad r = 1, 2, \dots, s,$$

که

بردار ورودی های نایقین DMU_o .	$\tilde{X}_o = (\tilde{x}_{1o}, \dots, \tilde{x}_{mo})$
بردار خروجی های نایقین DMU_o .	$\tilde{Y}_o = (\tilde{y}_{1o}, \dots, \tilde{y}_{so})$
بردار ورودی های نایقین DMU_k .	$\tilde{X}_k = (\tilde{x}_{1k}, \dots, \tilde{x}_{mk})$
بردار خروجی های نایقین DMU_k .	$\tilde{Y}_k = (\tilde{y}_{1k}, \dots, \tilde{y}_{sk})$

مدل $UERGMD$ را می توان برای تعیین کارایی DMU_o با ارزیابی مقدار بهینه مدل (۲) به کاربرد.

تعریف ۱۱ (کارای $UERGMD$) - DMU_o در مدل (۲) کارای $UERGMD$ نامیده می شود اگر و فقط اگر $\rho^* = 1$ که ρ^* مقدار بهینه مدل (۲) است در غیر این صورت ناکارای $UERGMD$ نامیده می شود.

قضیه ۵- برای هر k ، فرض کنید متغیرهای نایقین مستقل $\tilde{X}_k = (\tilde{x}_{1k}, \dots, \tilde{x}_{mk})$ و $\tilde{Y}_k = (\tilde{y}_{1k}, \dots, \tilde{y}_{sk})$ به ترتیب دارای توزیع نایقینی منظم $\varphi_k = (\varphi_{1k}, \dots, \varphi_{mk})$ و $\psi_k = (\psi_{1k}, \dots, \psi_{sk})$ داشته باشند و توزیع نایقینی معکوس $\varphi_{1k}, \dots, \varphi_{mk}, \psi_{1k}, \dots, \psi_{sk}$ مثبت باشد. آنگاه مدل (۲) با مدل (۳) معادل است:

$$\min \theta = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \gamma_r} \quad (3)$$

s.t.

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \int_0^1 f_{ik}^{-1}(\alpha) d\alpha - \theta_i \int_0^1 f_{io}^{-1}(1-\alpha) d\alpha \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \int_0^1 \varphi_{rk}^{-1}(1-\alpha) d\alpha - \gamma_r \int_0^1 \varphi_{ro}^{-1}(\alpha) d\alpha \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, s,$$

$$\lambda_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\theta_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\gamma_r \geq 1, \quad r = 1, 2, \dots, s.$$

اثبات: برای محدودیت‌ها، طبق قضیه (۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{k=1}^n \lambda_k \tilde{x}_{ik} - \theta_i \tilde{x}_{io} \right] &= \sum_{k=1}^n \lambda_k E[\tilde{x}_{ik}] - \theta_i E[\tilde{x}_{io}] = \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_0^1 f_{ik}^{-1}(\alpha) d\alpha - \theta_i \int_0^1 f_{io}^{-1}(1-\alpha) d\alpha \leq 0, & \forall i, \\ E \left[\sum_{k=1}^n \lambda_k \tilde{y}_{rk} - \gamma_r \tilde{y}_{ro} \right] &= \sum_{k=1}^n \lambda_k E[\tilde{y}_{rk}] - \gamma_r E[\tilde{y}_{ro}] = \sum_{k=1}^n \lambda_k \int_0^1 \varphi_{rk}^{-1}(1-\alpha) d\alpha - \gamma_r \int_0^1 \varphi_{ro}^{-1}(\alpha) d\alpha \geq 0, & \forall r, \end{aligned}$$

که این اثبات را کامل می‌کند.

نتیجه ۱: فرض کنید متغیرهای عدم قطعیت مستقل $\tilde{x}_{io}$ ، $\tilde{x}_{ik}$ ، $\tilde{y}_{rk}$ و $\tilde{y}_{ro}$ به ترتیب دارای توزیع عدم قطعیت منظم از نوع خطی به صورت $\mathcal{L}(a, b)$ داشته باشند. مدل قطعی مدل (۲) با استفاده از معیار مقدار انتظار به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \theta &= \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \gamma_r} \\ \text{s.t.} \\ \sum_{k=1}^n \lambda_k \left(\frac{a_{\tilde{x}_{ik}} + b_{\tilde{x}_{ik}}}{2} \right) - \theta_i \left(\frac{a_{\tilde{x}_{io}} + b_{\tilde{x}_{io}}}{2} \right) &\leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{k=1}^n \lambda_k \left(\frac{a_{\tilde{y}_{rk}} + b_{\tilde{y}_{rk}}}{2} \right) - \gamma_r \left(\frac{a_{\tilde{y}_{ro}} + b_{\tilde{y}_{ro}}}{2} \right) &\geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, s. \\ \lambda_k &\geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ \theta_i &\leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \gamma_r &\geq 1, \quad r = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (4)$$

نتیجه ۲: فرض کنید متغیرهای عدم قطعیت مستقل $\tilde{x}_{io}$ ، $\tilde{x}_{ik}$ ، $\tilde{y}_{rk}$ و $\tilde{y}_{ro}$ به ترتیب دارای توزیع عدم قطعیت منظم از نوع زیگزاگ به صورت $\mathcal{Z}(a, b, c)$ داشته باشند. مدل قطعی مدل (۲) با استفاده از معیار مقدار انتظار به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \theta &= \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \gamma_r} \\ \text{s.t.} \\ \sum_{k=1}^n \lambda_k \left(\frac{a_{\tilde{x}_{ik}} + 2b_{\tilde{x}_{ik}} + c_{\tilde{x}_{ik}}}{4} \right) - \theta_i \left(\frac{a_{\tilde{x}_{io}} + 2b_{\tilde{x}_{io}} + c_{\tilde{x}_{io}}}{4} \right) &\leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{k=1}^n \lambda_k \left(\frac{a_{\tilde{y}_{rk}} + 2b_{\tilde{y}_{rk}} + c_{\tilde{y}_{rk}}}{4} \right) - \gamma_r \left(\frac{a_{\tilde{y}_{ro}} + b_{\tilde{y}_{ro}} + c_{\tilde{y}_{ro}}}{4} \right) &\geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\ \lambda_k &\geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ \theta_i &\leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \gamma_r &\geq 1, \quad r = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (5)$$

نتیجه ۳: فرض کنید متغیرهای عدم قطعیت مستقل $\tilde{x}_{io}$ ، $\tilde{x}_{ik}$ ، $\tilde{y}_{rk}$ و $\tilde{y}_{ro}$ به ترتیب دارای توزیع عدم قطعیت منظم از نوع نرمال به صورت $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ داشته باشند. مدل قطعی مدل (۲) با استفاده از معیار مقدار انتظار به صورت زیر است:

$$\min \Phi = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i - \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \gamma_r \quad (6)$$

s.t.

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \mu_{\tilde{x}_{ik}} - \theta_i \mu_{\tilde{x}_{io}} \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \mu_{\tilde{y}_{rk}} - \gamma_r \mu_{\tilde{y}_{ro}} \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, s,$$

$$\lambda_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\theta_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\gamma_r \geq 1, \quad r = 1, 2, \dots, s.$$

۵- مورد مطالعاتی: درخت پالونیا

پالونیا بومی آسیای جنوب شرقی و چین است و در سال های اخیر باتوجه به کمبود منابع مورد نیاز صنعت چوب، در ایران به عنوان گونه ای غیر بومی، مورد توجه قرار گرفته است. درخت، خزان کننده، سخت چوب و تند رشدترین درخت پهن برگ در جهان است. این درخت سه سال پس از زمان کاشت به بازدهی تجاری رسیده و در سراسر جهان در زمینه هایی از قبیل ساختمان سازی، ساخت تخته های موج سواری و همچنین به عنوان سوخت زیستی مورد استفاده قرار می گیرد. چوب و تنه درخت پالونیا در صنعت مبلمان، تخته لایه، کبریت، کاغذ، کارتن و حتی هواپیما، گلاپدر و ادوات موسیقی قابل استفاده است. برگ ها و گل آذین این درخت هم در تولید کمپوست، کود آلی و تغذیه دام مصرف می شود. همچنین از آن ها می توان برای تولید داروها به دلیل برخورداری از موادی که بر کبد، کلیه، کیسه صفرا و بیماری های ریوی تاثیر مثبت می گذارند، استفاده نمود.

ارتفاع نهال پالونیا سالانه حدود ۰/۹ متر بیشتر شده و ارتفاع درخت پالونیای بالغ به ۹-۱۲ متر می رسد. ریشه های عمیق پالونیا آن را به درختی مستحکم و مقاوم تبدیل می کند. درخت پالونیا با کمک این ریشه های قوی در مناطقی با شیب های تند که معمولا درختان دیگر در آن جا رشد نمی کنند، دوام آورده و تحمل زیادی در برابر باد دارد؛ بنابراین در مناطقی که به طور طبیعی جنگل نمی روید، شاهد رشد درخت پالونیا هستیم. این درخت می تواند در خاک های بی کیفیت نیز رشد کند؛ بنابراین یکی از گزینه های مناسب برای احیای جنگل ها در سراسر جهان محسوب می شود. البته خاک های رسی سنگین با قابلیت زهکشی پایین برای رشد این درخت مناسب نیستند. این درخت در خاک های دارای pH اسیدی، خنثی یا کمی قلیایی رشد می کند. درخت پالونیا معمولا در فواصل ۶*۶ یا ۵*۵ کاشته می شود. به طور کل در یک هکتار بین ۲۰۰ تا ۴۰۰ اصله درخت را می توان کاشت. پس از استقرار در برابر خشکسالی مقاوم شده و آلودگی هوا تاثیر منفی روی آن ها نمی گذارد. با این وجود، موفقیت در احداث مزرعه پالونیا دشواری های خاص خود را داشته و مستلزم مراقبت های کافی است.

در شرایط مختلف اقلیمی ایران پس از ۵ تا ۷ سال می توان چوب این درختان را برای کاربردهای تجاری نظیر ساختمان سازی، صنعت مبلمان، کفپوش سازی، کبریت سازی، ساخت کاغذ و مداد، فرآورده های مرکب چوبی، آلات موسیقی و ... استفاده کرد. از دیگر فواید درخت پالونیا می توان به سازگاری آن با انواع خاک و شرایط زهکشی متفاوت اشاره کرد که کاشت این درخت را در مناطق مختلف ایران امکان پذیر می کند. برگ های پهن پالونیا نیز برای تغذیه دام و ساخت کمپوست که در صنعت دامداری، کشاورزی و فضای سبز در ایران کاربرد دارند، مناسب هستند.

طرح زراعت پالونیا بسیار بحث برانگیز است و موافقان و مخالفان خاص خود را دارد. به عقیده موافقان طرح زراعت پالونیا، باتوجه به فقدان پوشش جنگلی مناسب در ایران و لزوم حفظ منابع طبیعی و انتقال آن به نسل های آتی، این گونه درختان انتخاب مناسبی برای زراعت چوب و بهره برداری اقتصادی است. زراعت پالونیا مزایای زیادی دارد، اما در عین حال نمی توان از معایب و خطرات زیست محیطی کشت این درخت غافل بود. در بسیاری از نقاط جهان گونه ای غیر بومی و تهاجمی تلقی می شود؛ چراکه دشمن طبیعی ندارد و رشد آن فوق العاده سریع است.

درخت پالونیا به ویژه در سال اول رویش خود به مقادیر زیادی آب نیاز دارد. در نتیجه، کاشت آن در نواحی خشک و نیمه خشک توصیه نمی شود. هر درخت پالونیا قادر به تولید بیش از بیست میلیون تن بذر در سال است. این بذرها به وسیله باد و آب جابه جا شده و اکوسیستم هر منطقه را در معرض

نابودی قرار می‌دهند. البته برای رفع این مشکل بذر پالونیا هیبریدی و اصلاح‌شده با تضمین عقیم‌بودن آن به فروش می‌رسد. از ویژگی‌های درخت پالونیا می‌توان به مقاومت به خاک‌های آهکی و گچی، مقاومت به خاک‌های با زهکش بد و مقاومت به دود و هوای مناطق صنعتی اشاره نمود. هرچند تولید و صادرات درخت پالونیا از توجیه اقتصادی مناسبی برخوردار است، اما در کنار نگاه اقتصادی بایستی به حفظ اکوسیستم نیز توجه داشت. کشت غیراصولی و بی‌رویه این‌گونه، به دلیل تهاجمی بودن آن، به‌مرور زمان بر سطح آب‌های زیرزمینی، کیفیت خاک و گونه‌های گیاهی دیگر تأثیرات سوئی بر جای می‌گذارد و در نتیجه سایر تولیدات کشاورزی را با مشکلات جدی روبه‌رو خواهد کرد.

در ادبیات تحقیقی برای درخت پالونیا با رویکرد *DEA* صورت نگرفته و این مساله انتخاب ورودی و خروجی را کمی مشکل ساخته است؛ اما باتوجه‌به مطالعات کتابخانه‌ای و نظر کارشناسان، جدول ۱ ورودی‌ها و خروجی‌ها به‌منظور ارزیابی مناطق جهت کاشت درخت پالونیا را ارائه می‌کند. بر این اساس شاخص‌های نیروی کار و ماشین‌آلات به‌عنوان ورودی و عملکرد (کیلوگرم چوب در هکتار) و تولید اکسیژن (هر هکتار ۷۵ تن در سال اکسیژن تولید می‌کند) به‌عنوان شاخص‌های خروجی در ارزیابی انتخاب شدند.

جدول ۱- شاخص‌های ورودی و خروجی.
Table 1- Input and output indicators.

ورودی‌ها	خروجی‌ها
نیروی کار (ساعت)	عملکرد (کیلوگرم چوب در هکتار)
ماشین‌آلات (ساعت)	تولید اکسیژن (هر هکتار ۷۵ تن در سال اکسیژن تولید می‌کند)

مرجع صدور مجوز راه‌اندازی مزرعه درخت پالونیا، سازمان محیط زیست منطقه و سازمان حفظ نباتات است. معاونت عمرانی فرمانداری استان مازندران برای ۶ ماه آینده قصد اجرای پروژه کاشت گیاه پالونیا در شهرهای این استان را دارد. هدف از این پروژه شناسایی مستعدترین منطقه برای کشت و پرورش این گیاه به‌منظور دستیابی به بیشترین عملکرد و میزان تولید چوب در هر هکتار و با در نظر گرفتن ملاحظات زیست‌محیطی از نقطه‌نظر وارد آمدن کمترین آسیب و خسارت به محیط زیست منطقه و گونه‌های بومی این استان است.

جدول ۲- اعداد زیگزاگ برای متغیرهای ورودی و خروجی.
Table 2- Zigzag numbers for input and output variables.

خروجی ۲	خروجی ۱	ورودی ۲	ورودی ۱	نام شهر	DMU _j
(70,75,85)	(300,400,500)	(9,12,18)	(17.06,25,34.13)	رامسر	DMU1
(70,75,85)	(250,300,500)	(8,10,16)	(17.16,25,34.05)	تنکابن	DMU2
(70,74,84)	(250,350,500)	(7,11,17)	(18.02,25,33.97)	چالوس	DMU3
(68,74,84)	(230,350,500)	(9,12,17)	(17.12,25,33.24)	عباس‌آباد	DMU4
(66,75,83)	(210,290,450)	(8,12,16)	(17.09,25,32.89)	نوشهر	DMU5
(65,73,83)	(200,300,400)	(6,9,16)	(16.66,25,32.12)	نور	DMU6
(62,73,82)	(200,310,400)	(6,8,14)	(18.11,25,35.01)	آمل	DMU7
(63,77,81)	(195,285,350)	(6,10,15)	(16.67,25,34.11)	بابل	DMU8
(60,74,80)	(185,280,350)	(6,12,15)	(16.69,25,32.73)	سوادکوه	DMU9
(58,68,79)	(180,280,300)	(6,9,14)	(15.99,25,31.99)	ساری	DMU10
(59,66,79)	(180,270,300)	(6,8,13)	(15.96,25,32.89)	نکا	DMU11
(60,70,80)	(150,200,300)	(6,9,14)	(16.73,25,33.33)	بهشهر	DMU12

جدول ۳- نتایج با استفاده از مقدار مورد انتظار.
Table 3- Results using expected value.

کارا/ناکارا	مقدار تابع هدف	DMUs
کارا	1.00	DMU ₁
کارا	1.00	DMU ₂
کارا	1.00	DMU ₃
ناکارا	0.95	DMU ₄
ناکارا	0.90	DMU ₅

جدول ۳- ادامه.
Table 3- Continued.

کارا/ناکارا	مقدار تابع هدف	DMUs
کارا	1.00	DMU ₆
کارا	1.00	DMU ₇
ناکارا	0.93	DMU ₈
ناکارا	0.86	DMU ₉
ناکارا	0.89	DMU ₁₀
ناکارا	0.91	DMU ₁₁
ناکارا	0.80	DMU ₁₂

از نتایج ارزیابی کارایی DMU با استفاده از مدل‌های $EVERGM$ و $UERG$ که در جدول ۳ نشان داده شده است، می‌توان دریافت که ۵ واحد تصمیم‌گیری شامل $DMU_1, DMU_2, DMU_3, DMU_6, DMU_7$ از نظر $UERG$ کارا هستند، و سایر DMU از نظر $UERG$ ناکارا هستند. از آنجایی که شهرهای رامسر، تنکابن، چالوس، نور و آمل جز شهرهای کارا محسوب شدند لذا با میزان مشخصی از ورودی (نیروی کار و ماشین‌آلات)، توانسته‌اند حداکثر خروجی (عملکرد چوب و تولید اکسیژن) را تولید کنند. لذا بهترین گزینه‌ها برای اجرای پایلوت پروژه کاشت پالونیا هستند و می‌توانند به‌عنوان الگوی مرجع ($Benchmark$) برای سایر مناطق ناکارا استفاده شوند. همچنین این مناطق از منظر اقتصادی و زیست‌محیطی، ترکیب مناسبی از بهره‌وری و تولید اکسیژن را نشان می‌دهند.

۶- نتیجه‌گیری و پیشنهادها

DEA یکی از تکنیک‌های ریاضی پرکاربرد برای ارزیابی کارایی DMU است. در مدل‌های مرسوم این روش، ورودی‌ها و خروجی‌ها به‌صورت قطعی و دقیق در نظر گرفته می‌شوند؛ درحالی‌که در بسیاری از مسایل واقعی، داده‌ها با عدم قطعیت همراه‌اند و اطلاعات تاریخی کافی برای برآورد توزیع‌های احتمالی در دسترس نیست. در چنین شرایطی، بهره‌گیری از رویکردهای نایقین می‌تواند چارچوبی مناسب برای مدل‌سازی فراهم آورد. هدف این پژوهش، ارزیابی عملکرد DMU با ورودی‌ها و خروجی‌های نایقین مبتنی بر درجه باور از طریق توسعه مدل راسل اصلاح‌شده در DEA بود. در این راستا، با تکیه بر نظریه نایقینی و استفاده از روش مقدار مورد انتظار، مدل پیشنهادی به یک مدل قطعی معادل تبدیل شد تا امکان محاسبه کارایی به‌صورت عملی فراهم شود. نتایج نشان داد که مدل توسعه‌یافته توانایی مناسبی در سنجش کارایی تحت شرایط نایقین داشته و می‌تواند به‌عنوان ابزاری موثر در مسایل تصمیم‌گیری واقعی مورد استفاده قرار گیرد.

باتوجه به نتایج مطالعه موردی کشت درخت پالونیا در استان مازندران و شناسایی حدود ۴۲٪ از مناطق بررسی‌شده به‌عنوان نواحی مناسب، پیشنهادها کاربردی زیر ارائه می‌شود:

۱. سیاست‌گذاران و برنامه‌ریزان بخش کشاورزی می‌توانند مناطق کارا و مناسب شناسایی‌شده را در اولویت تخصیص منابع مالی، تسهیلات بانکی و حمایت‌های فنی قرار دهند تا بازده سرمایه‌گذاری افزایش یابد.
۲. با توجه به محدودیت منابع آب‌وخاک در برخی مناطق استان، استفاده از نتایج مدل پیشنهادی می‌تواند به تخصیص بهینه اراضی و جلوگیری از توسعه کشت در مناطق ناکارا کمک کند.
۳. از آنجاکه مدل توسعه‌یافته مبتنی بر داده‌های نایقین و درجه باور است، می‌تواند ابزار مناسبی برای تصمیم‌گیری در شرایط فقدان اطلاعات دقیق و تاریخی باشد و ریسک ناشی از عدم قطعیت را کاهش دهد.
۴. در مناطق مستعد، برنامه‌ریزی برای ایجاد صنایع فرآوری چوب پالونیا، توسعه بازار فروش و آموزش بهره‌برداران می‌تواند به افزایش ارزش افزوده و اشتغال‌زایی منطقه‌ای منجر شود.
۵. چارچوب پیشنهادی قابلیت تعمیم به سایر محصولات کشاورزی و حتی بخش‌های غیرکشاورزی را دارد؛ از این‌رو توصیه می‌شود در برنامه‌ریزی‌های منطقه‌ای و ملی مورد استفاده قرار گیرد.

مراجع

- [1] Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*, 2(6), 429–444. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(78\)90138-8](https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8)
- [2] Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management science*, 30(9), 1078–1092. <https://doi.org/10.1287/mnsc.30.9.1078>
- [3] Cooper, W. W., Park, K. S., & Pastor, J. T. (1999). RAM: A range adjusted measure of inefficiency for use with additive models, and relations to other models and measures in DEA. *Journal of productivity analysis*, 11(1), 5–42. <https://doi.org/10.1023/A:1007701304281>
- [4] Deprins, D., Simar, L., & Tulkens, H. (2006). Measuring labor-efficiency in post offices. In *Public goods, environmental externalities and fiscal competition* (pp. 285–309). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-25534-7_16
- [5] Pastor, J. T., Ruiz, J. L., & Sirvent, I. (1999). An enhanced DEA Russell graph efficiency measure. *European journal of operational research*, 115(3), 596–607. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(98\)00098-8](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(98)00098-8)
- [6] Tone, K. (2001). A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis. *European journal of operational research*, 130(3), 498–509. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(99\)00407-5](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(99)00407-5)
- [7] Mohammad Nejad, Z., & Ghaffari-Hadigheh, A. (2018). A novel DEA model based on uncertainty theory. *Annals of operations research*, 264(1), 367–389. <https://doi.org/10.1007/s10479-017-2652-7>
- [8] Liu, B. (2007). *Uncertain theory, 2nd edition*. Springer, Berlin, Germany. <https://hal.science/hal-03434433/document>
- [9] Wen, M., Guo, L., Kang, R., & Yang, Y. (2014). Data envelopment analysis with uncertain inputs and outputs. *Journal of applied mathematics*, 2014(1), 307108. <https://doi.org/10.1155/2014/307108>
- [10] Wen, M., Qin, Z., Kang, R., & Yang, Y. (2015). Sensitivity and stability analysis of the additive model in uncertain data envelopment analysis. *Soft computing*, 19(7), 1987–1996. <https://doi.org/10.1007/s00500-014-1385-7>
- [11] Wen, M. (2015). *Uncertain data envelopment analysis*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-43802-2>
- [12] Jiang, B., Lio, W., & Li, X. (2018). An uncertain DEA model for scale efficiency evaluation. *IEEE transactions on fuzzy systems*, 27(8), 1616–1624. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2018.2883546>
- [13] Lio, W., & Liu, B. (2018). Uncertain data envelopment analysis with imprecisely observed inputs and outputs. *Fuzzy optimization and decision making*, 17(3), 357–373. <https://doi.org/10.1007/s10700-017-9276-x>
- [14] Jamshidi, M., Saneie, M., Mahmoodirad, A., Lotfi, F. H., & Tohidi, G. (2019). Uncertain RUSSEL data envelopment analysis model: A case study in Iranian banks. *Journal of intelligent & fuzzy systems*, 37(2), 2937–2951. <https://doi.org/10.3233/JIFS-190067>
- [15] Jamshidi, M., Sanei, M., & Mahmoodirad, A. (2022). An uncertain allocation model for data envelopment analysis: A case in the Iranian stock market. *Scientia iranica. transaction e, industrial engineering*, 29(6), 3434–3454. <https://doi.org/10.24200/sci.2020.55047.4046>
- [16] Jamshidi, M., Sanei, M., Mahmoodirad, A., Tohidi, G., & Lotfi, F. H. (2021). Uncertain BCC data envelopment analysis model with belief degree: A case study in Iranian Banks. *International Journal of Industrial Mathematics*, 13(3), 239–249. <https://www.researchgate.net/publication/357097146>
- [17] Jamshidi, M., Sanei, M., Mahmoodirad, A., Lotfi, F. H., & Tohidi, G. (2021). Uncertain SBM data envelopment analysis model: A case study in Iranian banks. *International journal of finance & economics*, 26(2), 2674–2689. <https://doi.org/10.1002/ijfe.1927>
- [18] Mahmoodirad, A., Jamalain, A., & Hajiaghaei-Keshteli, M. (2024). An analysis of the sensitivity and stability of an uncertain SBM DEA model based on belief degree. *Expert systems with applications*, 255, 124778. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2024.124778>