



Paper Type: Original Article



Introducing a New Strategy for Assessing the Mutual Efficiency of Data Envelopment Analysis Based on Prioritizing Weights

Akbar Amiri^{1,*} , Mohammad Taghi Yahyapour Shikh Zahedi² ¹ Department of Mathematics, Talesh Branch, Islamic Azad University, Talesh, Iran; ak.amiri@iaau.ac.ir.² Department of Mathematics, Ramsar Branch, Islamic Azad University, Ramsar, Iran; mt_ypsh@yahoo.com.

Citation:



Amiri, A., & Yahyapour Shikh Zahedi, M. T. (2024). Introducing a new strategy for assessing the mutual efficiency of data envelopment analysis based on prioritizing weights. *Management: Modeling, analysis and applications*, 1(2), 91-104.

Received: 17/11/2023

Reviewed: 20/02/2024

Revised: 13/03/2024

Accepted: 23/04/2024

Abstract

Purpose: Given the complexity of performance criteria and the diversity of input and output data in decision-making units, traditional methods of mutual evaluation in Data Envelopment Analysis (DEA) are not able to provide a unique solution in some cases. This research aims to introduce a new strategy for assessing mutual efficiency by focusing on prioritizing weights that increase the accuracy and interpretability of performance evaluation.

Methodology: In this research, using the principles of DEA, a prioritization rule has been developed to determine input and output weights. This rule is adjusted based on the statistical and structural characteristics of the data and is applied in the form of a new mathematical model in DEA mutual evaluation. Also, theoretical analyses and graphical methods have been used to verify the accuracy of the model.

Findings: The results of the model implementation show that the proposed strategy has been able to provide a unique optimal solution for cross-evaluation while the positive features of traditional methods have been preserved. This model has higher stability and interpretability compared to common approaches.

Originality/Value: The main innovation of this research is in introducing a weight prioritization framework to solve the non-uniqueness problem in DEA cross-evaluation. This strategy can be used not only as a standalone solution but also as an effective complement to existing methods and helps to improve the quality of efficiency analysis.

Keywords: Data envelopment analysis, Prioritization, Weights, Efficiency, New strategy.



Corresponding Author: ak.amiri@iaau.ac.ir

<https://doi.org/10.22105/mmaa.v1i2.79>

Licensee. **Management: Modeling, Analysis and Application**. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



معرفی استراتژی نوین برای ارزیابی کارایی متقابل تحلیل پوششی داده‌ها مبتنی بر اولویت‌بندی وزن‌ها

اکبر امیری^۱، محمدتقی یحیی پور شیخ زاهدی^۲

^۱گروه ریاضی، واحد تالش، دانشگاه آزاد اسلامی، تالش، ایران.

^۲گروه ریاضی، واحد رامسر، دانشگاه آزاد اسلامی، رامسر، ایران.

چکیده

هدف: با توجه به پیچیدگی معیارهای عملکرد و تنوع در داده‌های ورودی و خروجی در واحدهای تصمیم‌گیری^۱، روش‌های سنتی ارزیابی متقابل در تحلیل پوششی داده‌ها^۲ در برخی موارد قادر به ارائه راه حل یکتا نیستند. هدف این پژوهش معرفی یک استراتژی نوین برای ارزیابی کارایی متقابل با تمرکز بر اولویت‌بندی وزن‌ها است که دقت و تفسیرپذیری ارزیابی عملکرد را افزایش دهد.

روش‌شناسی پژوهش: در این پژوهش با بهره‌گیری از اصول *DEA*، یک قاعده اولویت‌دهی برای تعیین وزن‌های ورودی و خروجی تدوین شده است. این قاعده بر اساس ویژگی‌های آماری و ساختاری داده‌ها تنظیم می‌شود و در قالب یک مدل ریاضی جدید در ارزیابی متقابل *DEA* اعمال می‌گردد. همچنین، برای بررسی صحت مدل، از تحلیل‌های نظری و روش‌های گرافیکی بهره گرفته شده است.

یافته‌ها: نتایج حاصل از پیاده‌سازی مدل نشان می‌دهد که استراتژی پیشنهادی توانسته است راه حل بهینه یکتا برای ارزیابی متقابل ارائه دهد، در حالی که ویژگی‌های مثبت روش‌های سنتی نیز حفظ شده‌اند. این مدل در مقایسه با رویکردهای رایج از پایداری و تفسیرپذیری بالاتری برخوردار است.

اصالت/ارزش افزوده علمی: نوآوری اصلی این پژوهش در معرفی یک چارچوب اولویت‌بندی وزن‌ها برای حل مساله عدم یکتایی در ارزیابی متقابل *DEA* است. این استراتژی، نه تنها به عنوان یک راهکار مستقل، بلکه به عنوان مکملی موثر برای روش‌های موجود نیز قابل استفاده است و به بهبود کیفیت تحلیل کارایی کمک می‌کند.

کلیدواژه‌ها: تحلیل پوششی داده‌ها، اولویت‌بندی، وزن‌ها، کارایی، استراتژی نوین.

۱- مقدمه

DEA که در ابتدا توسط چارنر و همکاران [1] پیشنهاد شد، به عنوان روشی موثر برای ارزیابی کارایی شناخته می‌شود و به طور گسترده در زمینه‌های مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد [2]. با این حال، کارایی بیش از حد تخمین زده شده و توانایی تشخیص ضعیف از نقص‌های اصلی *DEA* هستند که ناشی از انعطاف‌پذیری در تنظیم وزن‌ها هستند. روش کارایی متقاطع ابزار اصلی برای حل این نقص‌ها است که کارایی را از منظر خودارزیابی و ارزیابی همتا، به جای صرفاً خودارزیابی در رویکرد *DEA*، ارزیابی می‌کند. به دلیل دیدگاه جامع ارزیابی و توانایی تشخیص قوی، رویکرد کارایی

¹ Decision Making Units (DMUs)

² Data Envelopment Analysis (DEA)

متقابل *DEA* از زمان پیشنهاد آن توسط سکستون و همکاران [3] توجه گسترده‌ای را به خود جلب کرده و به بخش مهمی و جهت‌گیری پیشرو در نظریه *DEA* تبدیل شده است [2]، [4].

تحقیقات موجود در مورد روش کارایی متقاطع عمدتاً بر دو جنبه متمرکز است. جنبه اول، مطالعه استراتژی ارزیابی متقابل است. از زمان معرفی روش کارایی متقاطع، یکی از مشکلات کلیدی نظری آن عدم یکتایی راه‌حل بهینه است، زیرا ممکن است وزن‌های ورودی‌ها و خروجی‌ها که می‌توانند کارایی خودارزیابی را بهینه کنند، همچنین به‌عنوان معیاری برای ارزیابی سایر *DMUs* عمل کنند، تعداد زیادی از ترکیب‌های وزنی ورودی و خروجی وجود داشته باشد. دیل و گرین [5] اشاره کردند که ساخت یک بهینه‌سازی ثانویه، راهی موثر برای حل مشکلات راه‌حل‌های بهینه متعدد در روش کارایی متقاطع است، سپس استراتژی‌های کلاسیک ارزیابی متقاطع، شامل استراتژی‌های خیرخواهانه و تهاجمی را توسعه دادند. پس از آن مطالعات زیادی در این حوزه انجام شد [6]. لیانگ و همکاران [7] استراتژی ارزیابی متقابل بازی را توسعه داده و ثابت کردند که نتیجه تعادل نش را محقق می‌کند.

وانگ و چین [8] استراتژی ارزیابی متقابل خنثی را برای تعیین وزن‌های بهینه برای هر *DMU* از منظر خودشان پیشنهاد کردند. علاوه بر این استراتژی‌های بهبود پارتو [9]، استراتژی ارزیابی گروهی [10]، استراتژی نظریه چشم‌انداز [11]، استراتژی چانه‌زنی [12]، استراتژی تعریف‌کننده قوی ابر صفحه‌ها [13]، استراتژی پشیمانی-خوشحالی [14] و دیگر موارد در این زمینه مطالعه شده است. جنبه دوم، تمرکز بر تجمیع کارایی متقاطع است. در روش کارایی متقاطع سنتی، از یک روش میانگین جمعی برای تجمیع کارایی استفاده می‌شود. با این حال این روش نه تنها اولویت‌های تصمیم‌گیرندگان را منعکس نمی‌کند، بلکه ممکن است به از دست رفتن اطلاعات تصمیم‌گیری نیز منجر شود؛ بنابراین، ارزش شاپلی [15]، عملگر *OWH* [16]، استدلال شواهدی [17]، نظریه چشم‌انداز [18] و قاعده مخرج [19] به‌عنوان روش‌های تجمیع کارایی متقاطع به‌منظور تجمیع منطقی نتایج ارزیابی متقابل در زمینه‌های مختلف تصمیم‌گیری معرفی شده‌اند. علاوه بر این، مطالعات متعددی در زمینه گسترش و کاربرد کارایی متقاطع انجام شده است. روش کارایی متقاطع دومرحله‌ای و روش تعیین هدف کارایی متقاطع توسط [19] و [20] توسعه یافته است، درحالی‌که روش کارایی متقاطع برای ارزیابی کارایی حمل‌ونقل چندوجهی ریلی-آبی چین و صنعت ساخت‌وساز چین توسط [21] و [22] به‌کار رفته است.

گرچه روش کارایی متقابل در چندین جنبه توسعه یافته است، استراتژی ارزیابی متقابل همچنان بخش اصلی آن و به‌طور مستقیم تعیین‌کننده منطقی بودن ارزیابی کارایی متقابل است. ماهیت استراتژی ارزیابی متقابل، ساخت یک برنامه ثانویه برای کاهش مشکل عدم یکتایی راه‌حل بهینه است. با این‌که تعداد زیادی استراتژی ارزیابی متقابل پیشنهاد شده است، عدم یکتایی راه‌حل بهینه غالباً قابل اثبات نیست. در واقع، این استراتژی‌ها می‌توانند به‌طور موثری تعداد راه‌حل‌های بهینه را کاهش دهند، اما نتایج آن‌ها عموماً تنها یکتای نسبی است. به عبارت دیگر، با به‌کارگیری این استراتژی‌های ارزیابی متقابل، تصمیم‌گیرندگان تنها می‌توانند در احتمال به یک راه‌حل بهینه یکتا دست یابند، اما ممکن است آن راه‌حل هنوز هم یکتا نباشد؛ بنابراین، مشکل کلیدی نظری در روش کارایی متقابل *DEA* از حل عدم یکتایی راه‌حل بهینه به حل یکتایی نسبی تغییر یافته است.

بر اساس این پدیده، این مطالعه به‌طور نظری عدم یکتایی و یکتایی نسبی راه‌حل بهینه به‌دست‌آمده توسط استراتژی ارزیابی متقابل سنتی را توضیح می‌دهد. به این منظور مفهوم اولویت‌دهی وزنی معرفی می‌شود تا استراتژی جدید ارزیابی متقابل را بسازد و یکتایی نتایج بهینه به‌دست‌آمده از این استراتژی جدید اثبات شود. به تدریج گسترش عمومی استراتژی اولویت‌دهی وزنی توسعه می‌یابد، سپس اولویت‌دهی وزنی می‌تواند به‌عنوان یک استراتژی مکمل برای ادغام با سایر استراتژی‌ها استفاده شود. در نهایت، یک مثال عددی برای نشان دادن روش جدید کارایی متقابل *DEA* ارائه می‌شود. مزایای استراتژی ارزیابی متقابل که در این مقاله پیشنهاد شده، این است که استراتژی جدید نه تنها می‌تواند مزیت مقایسه‌ای *DMU* ارزیابی شده را از نظر ورودی-خروجی انعکاس دهد، بلکه مشکلات استراتژی‌های سنتی ارزیابی متقابل که فقط می‌توانند یکتایی نسبی را محقق کنند را نیز برطرف می‌کند و یکتایی راه حل بهینه را به‌طور نظری اثبات می‌کند.

قسمت‌های مختلف این مقاله به‌صورت زیر سازمان‌دهی شده است:

در بخش ۲، روش کارایی متقابل سنتی و استراتژی ارزیابی متقابل سنتی را معرفی می‌کند. عدم یکتایی و یکتایی نسبی راه‌حل بهینه آن‌ها در بخش ۳ تحلیل می‌شود. در بخش ۴، یک استراتژی جدید ارزیابی متقابل را پیشنهاد می‌کند و گسترش عمومی آن در بخش ۵ مورد بحث قرار می‌گیرد. در بخش ۶، مثال عددی را ارائه می‌دهد و نتیجه‌گیری در بخش ۷ بیان می‌شود.

۲- روش‌های سنتی

۲-۱- رویکرد سنتی کارایی متقابل

فرض کنید که n ، $DMUs$ برای ارزیابی وجود دارد و هر واحد $DMU_j = (j = 1, \dots, n)$ دارای m ورودی و s خروجی است که به ترتیب با X_{ij} و $Y_{rj} = (r = 1, \dots, s)$ و $(i = 1, \dots, m)$ نمایش داده می‌شوند. بر اساس مطالعه چارنز و همکاران [1]، مدل سنتی DEA که به مدل چارنز، کوپر و رودز^۱ معروف است که θ_{00} برای ارزیابی واحد DMU_0 به کار می‌رود و مدل خطی آن به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \theta_{00} &= \sum_{r=1}^s u_{ro} y_{ro}, \\ \text{s.t.} \\ \sum_{i=1}^m v_{io} x_{io} &= 1, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sum_{r=1}^s u_{ro} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{io} x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

for all $v_{io}, u_{ro} \geq 0$,

که در آن v_{io} و u_{ro} متغیرهای تصمیم هستند.

بر اساس مطالعه سکسون و همکاران [3]، مدل سنتی DEA به هر واحد DMU اجازه می‌دهد تا کارایی خود را با وزن‌های مطلوب اندازه‌گیری کند و در نتیجه θ_{00} به عنوان کارایی خودارزیابی واحد DMU_0 در نظر گرفته می‌شود. فرض کنید که $\theta_{00}, v_{io}, u_{ro}$ و راه حل بهینه مدل (۱) باشد. کارایی ارزیابی هم‌تا از DMU_j نسبت به DMU_0 با مدل زیر قابل محاسبه است:

$$\theta_{oj} = \frac{\sum_{r=1}^s u_{ro}^* y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_{io}^* x_{ij}}, \quad (j = 1, \dots, n; j \neq 0). \quad (2)$$

خودارزیابی و ارزیابی هم‌تا به همراه یکدیگر تشکیل ارزیابی متقابل را می‌دهند؛ بنابراین، کارایی متقابل θ_0^* از DMU_0 می‌تواند با مدل زیر تجميع شود:

$$\theta_0^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \theta_{oj}, \quad (j = 1, \dots, n; j \neq 0). \quad (3)$$

۲-۲- استراتژی سنتی ارزیابی متقابل

از آنجایی که مدل (۱) ممکن است چندین راه حل بهینه با وزن‌های ورودی-خروجی متفاوت داشته باشد و این موضوع بر ثبات نتایج ارزیابی متقابل تاثیر بگذارد؛ بنابراین، نیاز است تا استراتژی ارزیابی متقابل برای جلوگیری از این مشکل ایجاد شود. اساس این استراتژی انجام بهینه‌سازی ثانویه برای مدل (۱) است. استراتژی خیرخواهانه و استراتژی تهاجمی پیشنهاد شده توسط دیل و گرین [5] رایج‌ترین استراتژی‌های ارزیابی متقابل هستند. استراتژی خیرخواهانه به صورت زیر نشان داده شده است:

¹ Charnes, Cooper and Rhodes (CCR)

$$\text{Max} \sum_{r=1}^s u_{ro} \left(\sum_{j=1, j \neq o}^n y_{rj} \right),$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m v_{io} \left(\sum_{j=1, j \neq o}^n x_{ij} \right) = 1,$$

(۴)

$$\sum_{r=1}^s u_{ro} y_{ro} - \theta_{oo}^* \sum_{i=1}^m v_{io} x_{io} = 0,$$

$$\sum_{r=1}^s u_{ro} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{io} x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\text{for all } v_{io}, u_{ro} \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m,$$

که در آن θ_0^* نشان دهنده کارایی خودارزیابی بهینه DMU_0 است که توسط مدل (۱) به دست آمده است. علاوه بر این، اگر حداکثرسازی در تابع هدف به حداقل سازی تغییر یابد، مدل (۴) به استراتژی تهاجمی تبدیل می شود.

استراتژی خیر خواهانه-تهاجمی سایر DMU_s را به عنوان همکاران-رقبا DMU_0 در نظر می گیرد و هدف آن حداکثرسازی-حداقل سازی کارایی متقابل آن ها در شرایطی است که θ_0^* تغییر نکند؛ بنابراین، این استراتژی های ارزیابی متقابل می توانند تا حد ممکن به مشکل چندین راه حل بهینه مدل (۱) غلبه کنند و ثبات نتایج ارزیابی متقابل را تضمین کنند، سپس کارایی متقابل بر اساس مدل های (۲) و (۳) به دست می آید.

۳- تحلیل منحصربه فرد بودن راه حل بهینه

۳-۱- یکتایی نسبی استراتژی های ارزیابی متقابل موجود

مساله اصلی در کاربرد کارایی متقابل این است که ممکن است چندین راه حل بهینه از مدل DEA سنتی به دست آید. به همین دلیل استراتژی های متعددی برای ارزیابی متقابل طراحی شده اند تا این مشکل را برطرف کنند. اگرچه این استراتژی ها می توانند به طور موثری تعداد راه حل های بهینه را کاهش دهند، اما اغلب نمی توانند یکتایی راه حل بهینه را اثبات کنند.

در واقع استراتژی های ارزیابی متقابل موجود تنها یکتایی نسبی راه حل بهینه را تضمین می کنند. به عنوان مثال، شش DMU انتخاب شده و ورودی و خروجی های آن ها در جدول ۱ نشان داده شده است، سپس از استراتژی خیر خواهانه برای تعیین راه حل بهینه مدل (۱) استفاده می شود و نتایج ارزیابی در جدول ۲ نشان داده می شوند. با این حال، وزن های بهینه (۰/۲۸۶، ۰/۲۸۶، ۰/۲) هنوز هم تنها راه حل بهینه منحصربه فرد برای F نیستند. به عنوان مثال، وزن های بهینه A و B راه حل های بهینه F در مدل (۴) با افزایش نسبت وزن های ورودی و خروجی هستند؛ یعنی زمانی که (۰/۲۳۸، ۰/۰۷۹) و (۰/۱۱۱، ۰/۰۷۹) و (۰/۲۳۸، ۰/۰۷۹)، (۰/۱۱۱، ۰/۱۱۱)، (۰/۱۱۱، ۰/۰۷۹) برابر افزایش می یابند، این وزن ها همچنین معادله

$$\sum_{r=1}^s u_{ro} \sum_{j=1, j \neq 0}^n y_{rj} = 0.74$$

و تمامی قیود مدل (۴) برای F را برآورده می کنند؛ بنابراین، F حداقل سه راه حل بهینه متفاوت بر اساس استراتژی خیر خواهانه دارد و نتایج ارزیابی متفاوتی به دست می آید. این به آن معنی است که استراتژی خیر خواهانه در این جا نامعتبر است و راه حل بهینه آن تنها یکتایی نسبی دارد.

جدول ۱- ورودی و خروجی شش واحد تصمیم‌گیری.

Table 1- Input and output of six decision-making units.

DMU	x	y ₁	y ₁	DMU	x	y ₁	y ₁
A	1	2	4	D	1	1	2.5
B	1	4	2	E	1	2.5	1
C	1	3.5	3.5	F	5	13	13

جدول ۲- راه حل بهینه استراتژی خیرخواهانه.

Table 2- Optimal solution of the benevolent strategy.

DMU	θ_{00}^*	v_1	u_1	u_2	θ_{0j}^* A	B	C	D	E	F	θ_0^*
A	1.00	0.1111	0.0079	0.0238	1.00	0.71	0.86	1.00	0.50	0.86	0.82
B	1.00	0.1111	0.0238	0.0079	0.71	1.00	0.86	0.50	1.00	0.86	0.82
C	1.00	0.1111	0.0159	0.0159	1.00	1.00	1.00	0.88	0.88	1.00	0.96
D	0.62	0.1111	0	0.0278	0.61	0.39	0.50	0.63	0.25	0.50	0.48
E	0.62	0.1111	0.0278	0	0.39	0.61	0.50	0.25	0.63	0.50	0.48
F	0.74	0.2	0.0286	0.0286	0.74	0.74	0.74	0.65	0.65	0.74	0.71

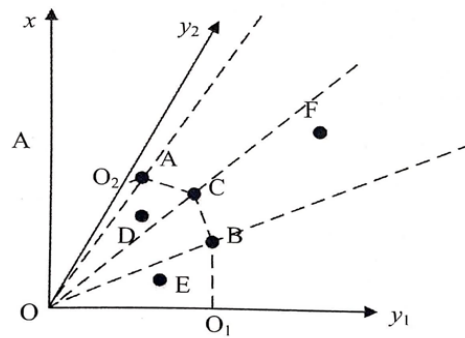
توجه داشته باشید که ستون‌های ۳ تا ۵ به وزن‌های بهینه ورودی‌ها و خروجی‌ها اشاره دارند و ستون‌های ۶ تا ۱۱ ماتریس ارزیابی متقابل را نشان می‌دهند، همچنین ستون‌های ۲ و ۱۲ نتایج ارزیابی روش DEA سنتی و روش کارایی متقابل DEA را نمایش می‌دهند.

۲-۳- تحلیل گرافیکی عدم یکتایی و یکتایی نسبی

عدم یکتایی راه حل بهینه ناشی از انعطاف‌پذیری وزن‌ها در روش DEA است. شش DMU در جدول ۱ به‌عنوان مثال به تصویر کشیده شده‌اند و مجموعه امکان تولید^۱ آن‌ها در شکل ۱ رسم شده است. مجموعه مخروطی و سطح محدب متشکل از پرتوهای OO_1 ، OA ، OC ، OB و OO_2 نمایانگر PPS و خط مرزی تولید شش DMU است. برای C ، هر ترکیب وزنی که بتواند DMU را بر روی صفحه OAC و OCB کارا کند، راه حل بهینه آن است. برای توضیح شهودی‌تر، F پنج برابر کاهش می‌یابد که با F' نمایش داده می‌شود، سپس می‌توان تمامی DMUs را در مقطع $x = 1$ مقایسه کرد که در شکل ۲ نشان داده شده است. O_1BCAO_2 خط مرزی پیش‌بینی تمام DMUs است و C نقطه پیش‌بینی F' بر روی خط مرزی تولید است. با توجه به این که O_1BCAO_2 یک مجموعه محدب است، p_1 تا p_n مماس‌های مجموعه محدب در C هستند و ترکیبات ورودی-خروجی مربوطه، راه حل بهینه C و F' هستند و همچنین آن‌ها راه‌حل‌های بهینه F پس از افزایش نسبت مساوی هستند؛ بنابراین، F دارای تعداد بی‌نهایت راه‌حل‌های بهینه بر اساس مدل (۱) است.

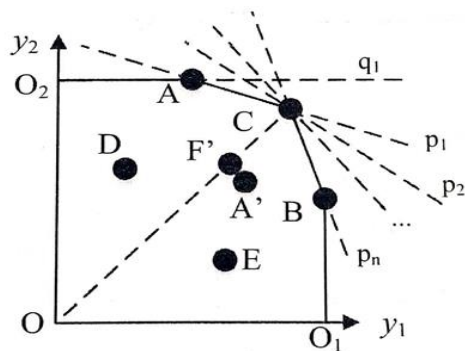
عملکرد استراتژی ارزیابی متقابل این است که DMU یک صفحه منحصربه‌فرد را به‌عنوان خط مرزی تولید خود طبق یک استراتژی مشخص انتخاب کند. برای مثال، p_1 تا q_1 مماس‌های مجموعه محدود بر روی A هستند و A دارای تعداد بی‌نهایت راه حل بهینه بر اساس مدل (۱) است. فرض کنید DMU جدیدی که توسط C ، D ، E ، F به‌دست آمده، دارای ورودی و خروجی‌هایی به‌صورت (۲۲، ۲۴، ۹) است و تصویر آن بر روی مقطع $x = 1$ برابر (۲/۴۴، ۲/۶۷، ۱) است که با A' نمایش داده می‌شود. از استراتژی خیرخواهانه برای انتخاب یک مماس مرجع بین p_1 تا q_1 به‌منظور حداکثرکردن کارایی A' ، p_1 انتخاب می‌شود، زیرا نزدیک‌ترین مماس مرجع به A' است، سپس ترکیب وزن‌های منحصربه‌فرد برای A تعیین می‌شود.

¹ Production Possibilities Set (PPS)



شکل ۱- مجموعه امکان تولید شش واحد تصمیم گیری.

Figure 1- Production possibilities set of six decision-making units.



شکل ۲- مجموعه امکان تولید در مقطع $x = 1$.

Figure 2- Production possibilities set at the intersection $x = 1$.

با این حال، استراتژی خیرخواهانه برای F معتبر نیست، زیرا صفحه‌های OAC و OCB متعلق به مرز تولید هم برای F و هم برای DMU است که توسط $DMUs$ دیگر در شکل ۱ نمایش داده شده است. این به آن معناست که ترکیب‌های ورودی-خروجی مربوط به p_1 تا p_n نیز راه حل بهینه F در شکل ۲ هستند. به عبارت دیگر، استراتژی خیرخواهانه در این زمان نمی‌تواند مماس منحصر به فردی را تعیین کند؛ بنابراین، F همچنان چندین راه حل بهینه بر اساس استراتژی خیرخواهانه دارد. به طور مشابه، چنین مشکلاتی اغلب در سایر استراتژی‌های ارزیابی متقابل وجود دارد و آن‌ها تنها می‌توانند یکتایی نسبی راه حل بهینه را تضمین کنند.

۴- رویکرد جدید کارایی متقاطع با اولویت وزنی

۴-۱- قاعده اولویت وزنی

دلیل اساسی یکتایی نسبی استراتژی ارزیابی متقاطع سنتی این است که نمی‌تواند همواره یک مماس مرجع منحصر به فرد برای $DMUs$ تعیین کند. در واقع، نسبت بین وزن‌ها به طور مستقیم در شیب مماس مجموعه محدب منعکس می‌شود. اگر نسبت منحصر به فرد قابل تعیین باشد، ترکیب منحصر به فرد مماس و وزن‌ها نیز قابل تعیین است؛ بنابراین، تعیین نسبت منحصر به فرد بین وزن‌ها اساس تضمین یکتایی راه حل بهینه کارایی متقاطع به شمار می‌رود و قاعده اولویت وزنی برای تحقق این هدف توسعه یافته است.

اگر یک ورودی-خروجی دارای مزیت نسبی در بین تمام $DMUs$ باشد، آن‌گاه وزن مرتبط با آن باید از نظر خودارزیابی بیشتر از سایر وزن‌ها باشد، زیرا رویکرد سنتی DEA به هر DMU اجازه می‌دهد تا کارایی خود را با وزن‌های مطلوب اندازه‌گیری کند؛ بنابراین، مفهوم DMU ایده آل برای اندازه‌گیری مزیت نسبی ورودی-خروجی‌های $DMUs$ معرفی می‌شود [18]، [23].

تعریف ۱- فرض کنید G دارای

$$x_{iG} = \min_{j=1,\dots,n} x_{ij} (i = 1, \dots, m).$$

$$y_{rG} = \max_{j=1,\dots,n} y_{ij} (r = 1, \dots, s).$$

باشد، آن گاه به آن DMU ایده آل گفته می شود.

تعریف ۲- درجه نزدیکی ورودی و خروجی های DMU به ورودی و خروجی های DMU ایده آل، به عنوان درجه مزیت آن ها نامیده می شود. درجه مزیت x_{ij} و y_{rj} وزن ورودی و خروجی به صورت زیر محاسبه می شود.

$$x_{ij} = \frac{x_{iG}}{x_{ij}}, \quad y_{ij} = \frac{y_{rj}}{y_{rG}} \quad (5)$$

که در آن x_{iG} و y_{rG} به عنوان صورت و مخرج به طور جداگانه برای تسهیل مقایسه استفاده می شوند. هرچه مقدار x_{iG} یا y_{rG} بیشتر باشد، به این معناست که x_{iG} یا y_{rG} به DMU ایده آل برای DMU_j نزدیکتر است و مزیت نسبی x_{ij} یا y_{rj} برای DMU_j واضح تر است، سپس قاعده اولویت دهی وزنی به صورت زیر ساخته می شود.

مرحله ۱- فرض کنید $h=1$ و $H=1$ و K_j^h مجموعه شامل تمام $x_{ij} (i = 1, \dots, m)$ و $y_{ij} (r = 1, \dots, s)$ برای DMU_j باشد:

$$W_j^H = \{\widehat{x}_{ij}, y_{rj} | \widehat{x}_{ij}, \widehat{y}_{rj}\} = \max_{\widehat{x}_{ij}, y_{rj} \in K_j^h} \{\widehat{x}_{ij}, y_{rj}\},$$

که W_j^H نمایانگر اولویت H th است و وزن های ورودی و خروجی مربوطه آن ها، v_{ij} و u_{rj} در مجموعه W_j^H طبقه بندی می شوند.

مرحله ۲- فرض کنید $K_j^{h+1} = K_j^h - W_j^H$. اگر آن گاه توقف کنید؛ در غیر این صورت:

$$W_j^{H+1} = \{\widehat{x}_{ij}, y_{rj} | \widehat{x}_{ij}, \widehat{y}_{rj}\} = \max_{\widehat{x}_{ij}, y_{rj} \in K_j^h} \{\widehat{x}_{ij}, y_{rj}\}$$

و وزن های ورودی و خروجی مربوطه آن ها، v_{ij} و u_{rj} در مجموعه W_j^H طبقه بندی می شوند.

مرحله ۳- فرض کنید $h=h+1$ و $H=H+1$ و مرحله ۲ را تکرار کنید تا $K_j^h = \emptyset$ شود.

باتوجه به قاعده اولویت وزنی، ورودی و خروجی های DMU_j می توانند اولویت های متفاوتی داشته باشند و وزن های مربوطه آن ها به W_j^H متفاوت تعلق می گیرد. قاعده اولویت وزنی با ویژگی های تنظیم وزن انعطاف پذیر در روش سنتی DEA مطابقت دارد، زیرا ورودی و خروجی هایی با درجه مزیت بالاتر، اولویت بیشتری می یابند.

۲-۴- استراتژی ارزیابی متقابل با اولویت وزنی

بیشتر استراتژی های ارزیابی متقابل، مماس مرجع $DMUs$ را بر اساس اولویت های شخصی تصمیم گیرندگان انتخاب می کنند و این امر ناگزیر منجر به مشکلات ذهنی قوی و انتخاب راهبرد دشوار می گردد. برای اجتناب از این مشکلات، اولویت وزنی به منظور ساخت استراتژی ارزیابی متقابل معرفی می شود که بر اساس ویژگی های اساسی داده ها استوار است [24]، [25]. به کمک قاعده اولویت وزنی، ورودی و خروجی های DMU_o می توانند به H اولویت تقسیم گردند، سپس مدل خاص استراتژی ارزیابی متقابل به صورت زیر ساخته می شود:

$$\text{Max} \left(\text{Min}_{v,u \in w_0^1} (v, u) + \delta \text{Min}_{v,u \in w_0^1} (v, u) + \dots + \delta^{H-1} \text{Min}_{v,u \in w_0^H} (v, u) \right),$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m v_{io} x_{io} = 1, \quad (6)$$

$$\sum_{r=1}^s u_{ro} y_{ro} - \theta_{do}^* \sum_{i=1}^m v_{io} x_{io} = 0,$$

$$\text{for all } v_{io}, u_{ro} \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m.$$

در این جا، δ عددی بسیار کوچک تر از v و u است که برای تنظیم اولویت وزنی استفاده می شود. همه محدودیت ها به منظور تضمین این که کارایی خودارزیابی DMU_o برابر با θ_0^* است، به کار می رود. تابع هدف حداکثر کردن حداقل وزن های ورودی و خروجی بر اساس اولویت های آن ها است. این به این دلیل است که v و u متعلق به بیانگر درجه نزدیکی ورودی ها و خروجی ها به DMU ایده آل در میان تمام ورودی و خروجی های DMU_o هستند؛ بنابراین، حداکثر کردن حداقل آن ها بر اساس اولویت هایشان به برجسته سازی مزایای مقایسه ای DMU_o کمک می کند. با استفاده از تبدیل چارنر و کوپر [26]، مدل (۶) می تواند به برنامه ریزی خطی زیر برای حل تبدیل شود:

$$Mcx\sigma_1 + \delta\sigma_2 + \dots + \delta^{H-1},$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m v_{io} x_{io} = 1,$$

$$\sum_{r=1}^s u_{ro} y_{ro} - \theta_{\infty}^* \sum_{i=1}^m v_{io} x_{io} = 0, \quad (7)$$

$$\sum_{r=1}^s u_{ro} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{io} x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$v, u \geq \sigma_h, \quad v, u \in w_o^h, \quad h = 1, \dots, H,$$

$$\text{for all } v_{io}, u_{ro} \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m,$$

که در آن σ_h نیز متغیر تصمیم است.

وزن های به دست آمده از مدل (۷) نه تنها می توانند از دیدگاه خودارزیابی، به حداکثر کارایی $DMUs$ ارزیابی شده اطمینان دهند، بلکه به حد امکان مزایای خود را نیز برجسته می کنند. به این دلیل که ورودی و خروجی های DMU ارزیابی شده با مزیت مقایسه ای بالاتر می توانند با اولویت بیشتری بهینه شوند به شرطی که کارایی به دست آمده از نظر خودارزیابی ثابت بماند. درعین حال، این وزن ها کارایی ارزیابی متقابل $DMUs$ با مزایای مشابه را افزایش می دهند و در نتیجه نتایج ارزیابی منطقی تر خواهند بود. بر اساس این وزن های بهینه، کارایی متقابل $DMUs$ از طریق مدل های (۲) و (۳) به دست می آید.

۳-۴- تجزیه و تحلیل یگانگی استراتژی جدید ارزیابی متقاطع

تضمین یکتایی راه حل بهینه، دلیل اساسی ساخت رویکرد کارایی متقاطع است که مشکل اساسی این روش محسوب می شود. به منظور منطقی بودن مدل (۷)، تجزیه و تحلیل یگانگی راه حل بهینه برای این استراتژی جدید ارائه شده است.

حالت ۱- هر W_j^H تنها شامل یک عنصر باشد. در این حالت مدیران تصمیم می‌توانند بر اساس ترتیب اولویت، ترکیب وزن‌های منحصربه‌فردی را از میان چندین راه حل بهینه انتخاب کنند؛ بنابراین، راه حل بهینه منحصربه‌فرد قابل دستیابی خواهد بود.

حالت ۲- W_j^H شامل عناصر متعدد باشد در این حالت می‌تواند به سه زیر حالت تقسیم شود.

زیر حالت ۱- W_j^H شامل خروجی‌های متعدد $\hat{u}_{Ro} (R = 1, \dots, S, S \leq S)$ باشد. فرض کنید دو راه حل بهینه مختلف وجود داشته باشد که خروجی‌های آن‌ها در W_j^H به صورت $\hat{u}_{Ro}^1$ و $\hat{u}_{Ro}^2$ بیان شود. طبق **قضیه ۱**، اگر هر $\hat{u}_{fo}^1 > \hat{u}_{fo}^2$ و $\hat{u}_{fo}^1 < \hat{u}_{fo}^2$ به ازای $(f, F \in (1, \dots, S))$ باشد، آن‌گاه باید راه حل بهینه‌ای وجود داشته باشد که شامل $\hat{u}_{fo}^3 = \hat{u}_{fo}^1$ باشد؛ بنابراین، بر اساس ترتیب اولویت وزن‌ها و **تابع هدف مدل (۷)**، راه حل بهینه منحصربه‌فرد قابل دستیابی است؛ و اگر هر $\hat{u}_{fo}^1 > \hat{u}_{fo}^2$ و $\hat{u}_{fo}^1 < \hat{u}_{fo}^2$ به ازای $(f, F \in (1, \dots, S))$ باشد، آن‌گاه نیز می‌توان راه حل بهینه منحصربه‌فردی بر اساس ترتیب اولویت به دست آورد.

زیر حالت ۲- W_j^H شامل ورودی‌های متعدد $\hat{v}_{Io} (I = 1, \dots, M, M \leq m)$ باشد. طبق **قضیه ۲**، بر اساس ترتیب اولویت وزن‌ها و تابع هدف **مدل (۷)**، راه حل بهینه منحصربه‌فرد نیز به دست می‌آید.

زیر حالت ۳- W_j^H شامل ورودی‌های متعدد $\hat{v}_{Io} (I = 1, \dots, M, M \leq m)$ و خروجی‌های $\hat{u}_{Ro} (R = 1, \dots, S, S \leq S)$ باشد. به دلیل این‌که $\sum_{r=1}^S u_{ro} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{io} x_{ij} = 1$ ؛ بنابراین، هیچ تعاملی بین وزن‌های ورودی و خروجی‌ها وجود ندارد به شرط آن‌که

$$\sum_{r=1}^S u_{ro} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{io} x_{ij} \leq 0 (j = 1, \dots, n)$$

برآورده شود، زیرا تمام راه حل‌های بهینه این شرایط را برآورده می‌کنند، **مرحله ۳** را می‌توان به عنوان ترکیبی از **مرحله ۱** و **مرحله ۲** در نظر گرفت؛ بنابراین، راه حل بهینه منحصربه‌فرد نیز می‌تواند با **مدل (۷)** به دست آید.

به طور کلی، **مدل (۷)** دارای یک راه حل بهینه منحصربه‌فرد است.

طبق **قضیه ۳**، وزن‌های بهینه منحصربه‌فرد با استفاده از استراتژی جدید ارزیابی متقاطع با اولویت وزن‌ها به دست می‌آید و بر این اساس، $DMUs$ دارای راه حل بهینه منحصربه‌فردی بر اساس رویکرد کارایی متقاطع DEA با استراتژی جدید خواهند بود.

۵- گسترش عمومی اولویت وزن

استراتژی ارزیابی متقابل با اولویت وزن، راه حل بهینه منحصربه‌فردی را با توجه به مزیت مقایسه‌ای ورودی و خروجی‌های $DMUs$ تعیین می‌کند. این استراتژی ویژگی‌های شهودی داده‌ها را مدنظر قرار می‌دهد، اما اولویت‌های ذهنی تصمیم‌گیرندگان را نادیده می‌گیرد. به منظور حل این مشکل، اولویت وزن نه تنها به عنوان یک استراتژی مستقل بلکه به عنوان یک استراتژی مکمل در سایر استراتژی‌های ارزیابی متقابل به کار می‌رود. استراتژی خیرخواهانه برای نشان دادن گسترش عمومی اولویت وزن استفاده می‌شود و مدل خاص به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$\text{Max} \sum_{r=1}^s u_{ro} \sum_{j=1, j \neq o}^n y_{rj} + \delta (\text{Min}_{v, u \in \sigma_o^1}(v, u) + \delta \text{Min}_{v, u \in \sigma_o^2}(v, u) + \dots + \delta^{H-1} \text{Min}_{v, u \in \sigma_o^H}(v, u)),$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m v_{io} \sum_{j=1, j \neq o}^n x_{ij} = 1,$$

(۸)

$$\sum_{r=1}^s u_{ro} y_{ro} - \theta_{oo}^* \sum_{i=1}^m v_{io} x_{io} = 0,$$

$$\sum_{r=1}^s u_{ro} y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_{io} x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\text{for all } v_{io}, u_{ro} \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m,$$

از آن جا که σ عددی بسیار کوچک تر از v و u است، تابع هدف مدل (۸) ترکیبی وزنی از استراتژی خیرخواهانه و استراتژی اولویت وزن است. به این معنی است که وزن های بهینه به دست آمده از استراتژی خیرخواهانه، بر اساس اولویت وزن بهینه می شوند. به طور مشابه، مدل (۸) را می توان مانند مدل (۶) به برنامه ریزی خطی تبدیل کرد و مدل خاص به صورت زیر ساخته می شود:

$$\text{Max} \sum_{r=1}^s u_{ro} \sum_{j=1, j \neq o}^n y_{ij} + \delta \sigma_1 + \delta^2 \sigma_2 + \dots + \delta^H,$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m v_{io} \sum_{j=1, j \neq o}^n x_{ij} = 1,$$

(۹)

$$\sum_{r=1}^s u_{ro} y_{io} - \theta_{oo}^* \sum_{i=1}^m v_{io} x_{ib} = 0,$$

$$\sum_{r=1}^s u_{ro} y_{ij} - \sum_{i=1}^m v_{ib} x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$v, u \geq \sigma_{hj}, \quad v, u \in w_o^h, \quad h = 1, \dots, H,$$

$$\text{for all } v_{ij}, u_{io} \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m.$$

قضیه ۴- مدل (۹) دارای یک راه حل بهینه منحصر به فرد است.

برهان: مراحل برهان مشابه برهان قضیه ۳ است.

در مدل (۹)، اولویت وزنی به عنوان یک استراتژی مکمل به استراتژی خیرخواهانه افزوده می شود و در نتیجه، مدل جدید نه تنها مزایای استراتژی خیرخواهانه را که اولویت های ذهنی تصمیم گیرندگان را منعکس می کند حفظ می کند، بلکه منحصر به فرد بودن راه حل بهینه را بر اساس ویژگی های عینی داده ها تضمین می کند.

به طور کلی اولویت وزنی چه به عنوان یک استراتژی ارزیابی متقابل مستقل استفاده شود و چه به عنوان یک استراتژی مکمل در سایر استراتژی های ارزیابی متقابل، عدم منحصر به فردی و نسبی بودن راه حل بهینه در رویکرد کارایی متقابل DEA می تواند به طور بنیادی حل کند.

۶- مثال عددی

شش DMU در جدول ۱ برای نمایش رویکرد جدید کارایی متقاطع با استراتژی اولویت وزنی انتخاب شده اند و ورودی ها و خروجی های واحدهای ایده آل آن ها که با G نشان داده شده اند، به صورت $(1, 13, 13)$ است، سپس درجه مزیت که با $\hat{x}_i$ و $\hat{y}_i$ نشان داده شده و اولویت W_j^H ورودی ها و خروجی های این $DMUs$ در جدول ۳ نشان داده شده است.

جدول ۳- اولویت وزن ورودی و خروجی ها برای شش واحد تصمیم گیری.

Table 3- Priority weight of inputs and outputs for six decision-making units.

DMU	$\hat{x}_1$	$\hat{y}_1$	$\hat{y}_2$	W_0^1	W_0^2	W_0^3
A	1	0.15	0.31	v_1	u_2	u_1
B	1	0.31	0.15	v_1	u_1	u_2
C	1	0.27	0.27	v_1	u_1, u_2	
D	1	0.08	0.19	v_1	u_2	u_1
E	1	0.19	0.08	v_1	u_1	u_2
F	0.2	1	1	u_1, u_2	v_1	

همان طور که در جدول ۳ مشاهده می شود، اولویت های W_0^1 از A تا E برابر با v_1 است، زیرا x_1 آن ها بزرگتر از y_1 و y_2 است؛ در حالی که W_0^1 از F شامل u_1 و u_2 است، زیرا $u_1 = u_2 > v_1$ اگر $\delta = 10^{-10}$ در نظر گرفته شود، آنگاه بر اساس نتایج جدول ۳، مدل های (۲)، (۳) و (۷) می توانند برای محاسبه کارایی متقاطع منحصر به فرد θ_0^* این واحدها استفاده شوند، و نتایج در جدول ۴ نشان داده شده است.

جدول ۴- نتایج ارزیابی مبتنی بر روش جدید کارایی متقابل.

Table 4- Evaluation results based on the new mutual efficiency method.

DMU	v_1	u_1	u_2	θ_{0j} A	B	C	D	E	F	θ_0^*
A	1	0	0.25	1.00	0.50	0.86	1.00	0.50	0.86	0.79
B	1	0.25	0	0.50	1.00	0.86	0.50	1.00	0.86	0.79
C	1	0.1429	0.1429	0.88	0.88	1.00	0.88	0.88	1.00	0.92
D	1	0	0.25	0.62	0.25	0.50	0.63	0.25	0.50	0.46
E	1	0.25	0	0.25	0.62	0.50	0.25	0.63	0.50	0.46
F	0.2	0.0286	0.0286	0.65	0.65	0.74	0.65	0.65	0.74	0.68

همان طور که در ستون های ۲ تا ۴ جدول ۴ مشاهده می شود، وزن های بهینه ورودی و خروجی مطابق با قاعده اولویت وزنی هستند. به عنوان مثال، u_1 و u_2 از A و B دقیقاً متضاد یکدیگر هستند، زیرا اولویت $\hat{y}_1$ و $\hat{y}_2$ آن ها دقیقاً متضاد است. توجه داشته باشید که θ_0^* از A و B برابر است و همچنین D و E نیز همین طور هستند. این عدم تفاوت نه به دلیل ناتوانی رویکرد جدید کارایی متقاطع در شناسایی، بلکه به دلیل تقارن شش واحد است همان گونه که در شکل ۲ نشان داده شده است. مگر این که تصمیم گیرندگان اولویت های متفاوتی برای اهمیت y_1 و y_2 داشته باشند، در غیر این صورت باید $A = B$ و $D = E$ در کارایی برقرار باشد. ستون های ۵ تا ۱۰ شامل ماتریس ارزیابی متقاطع هستند و آخرین ستون نتیجه روش جدید کارایی متقاطع است. این به این معناست که کاراترین DMU ، واحد C با $\theta_0^* = 0.96$ است و D و E ناکارترین $DMUs$ هستند.

برای نشان دادن مزیت استراتژی جدید اولویت وزنی، از استراتژی سنتی خیر خواهانه نیز برای ارزیابی کارایی متقاطع این واحدها استفاده شده است که دارای چندین راه حل بهینه است. این راه حل های بهینه در جدول ۵ آورده شده است.

جدول ۵- راه حل های بهینه چندگانه استراتژی خیرخواهانه.

Table 5- Multiple optimal solutions of the benevolent strategy.

DMU	$\theta_0^*, \theta_0^{(1)*}$	$\theta_0^{(2)*}$	...	$\theta_0^{(N)*}$
A	0.82	0.85	...	0.80
B	0.82	0.80	...	0.85
C	0.96	0.96	...	0.96
D	0.48	0.50	...	0.46
E	0.48	0.46	...	0.50
F	0.71	0.71	...	0.71

θ_0^* نتایج بهینه به دست آمده از استراتژی خیرخواهانه سنتی را نمایان می سازد، در حالی که $\theta_0^{(1)*}$ تا $\theta_0^{(N)*}$ تمام مقادیر ممکن برای هستند و N به تعداد نامتناهی اشاره دارد.

بنابراین، ورودی ها و خروجی های DMU ایده آل به صورت (435, 7135, 480, 146721, 122153, 66823) مشخص می شود. اگر $\delta = 10^{-10}$ باشد، سپس بر اساس روش کارایی متقابل DEA با استراتژی اولویت وزنی، نتایج ارزیابی به صورت زیر به دست می آید.

دلیل بنیادی این پدیده این است که F دارای چندین مماس مرجع است. همان طور که در شکل ۲ نشان داده شده است، p_1 تا p_2 مماس های مرجع F هستند و ترکیبات ورودی و خروجی مربوط به آن ها راه حل های بهینه بر اساس استراتژی خیرخواهانه هستند. برای استراتژی اولویت وزنی، مماس با شیب ۱-، مماس مرجع منحصر به فرد F است و از این رو، تنها راه حل بهینه به دست می آید.

علاوه بر این، نتایج بهینه مدل CCR ، روش جدید کارایی متقابل با اولویت وزن و روش کارایی متقابل با استراتژی خیرخواهانه به ترتیب با θ_0^* و θ_{00}^* نشان داده می شود.

در مقایسه با θ_0^* ، θ_{00}^* توانایی تشخیص بالاتری برای $DMUs$ موثر دارد، به عنوان مثال ارزش های θ_0^* و θ_{00}^* برای A به ترتیب ۱ و ۰/۷۹ هستند. این امر به دلیل این است که دیدگاه ارزیابی روش کارایی متقابل جامع تر از مدل CCR است.

در مقایسه با θ_0^* ، مقدار θ_0^{**} کمتر است. به عنوان مثال، مقادیر θ_0^* و θ_0^{**} برای E به ترتیب ۰/۴۸ و ۰/۴۶ هستند. این به تفاوت استراتژی های ارزیابی متقابل مربوط می شود. استراتژی خیرخواهانه به هدف حداکثر کردن کارایی سایر $DMUs$ در شرایطی که θ_{00}^* ثابت باقی بماند، متمرکز است، در حالی که استراتژی اولویت وزنی تاکید بیشتری بر مزیت های مقایسه ای ورودی و خروجی های $DMUs$ ارزیابی شده دارد. مورد اول دارای تمایل واضح ذهنی است، در حالی که مورد دوم بیشتر به ویژگی های شهودی داده ها می پردازد. شایان ذکر است که $\theta_0^{**} = \theta_0^{(1)*}$ است، زیرا θ_0^{**} یک نتیجه ویژه از کارایی متقابل با استراتژی خیرخواهانه است که از بهینه سازی استراتژی اولویت وزنی به دست آمده است. در واقع هر دو θ_0^* و θ_0^{**} دارای یک راه حل بهینه منحصر به فرد هستند، زیرا برای آن ها از استراتژی اولویت وزن استفاده شده است. تفاوت در این است که استراتژی اولویت وزن برای θ_0^* یک استراتژی مستقل است، در حالی که برای θ_0^{**} یک استراتژی تکمیلی محسوب می شود.

۷- نتیجه گیری ها

رویکرد کارایی متقابل DEA ، به عنوان یک روش ارزیابی کارایی نسبی با دیدگاه جامع و قابلیت شناسایی بالا شناخته می شود و ابزاری موثر برای $DMUs$ جهت درک صحیح فعالیت های تولیدی خود فراهم می آورد. با وجود مطالعات فراوان در زمینه کارایی متقاطع، پدیده ای که منجر به عدم یکتایی راه حل بهینه می شود هنوز به طور واقعی حل نشده است و نتایج آن معمولاً نسبتاً منحصر به فرد هستند. اخیراً، یکتایی نسبی به عنوان یک مسایل نظری مهم در رویکرد کارایی متقاطع در نظر گرفته شده است. در واقع، این مشکل به طور جدی بر قابل اعتماد بودن رویکرد کارایی متقاطع DEA تاثیر می گذارد و به تبع آن، گسترش و کاربرد آن را محدود می کند. در این پژوهش ساختار نظری منحصر به فرد بودن نسبی راه حل بهینه در رویکرد کارایی متقابل DEA آشکار گردید و قانون اولویت وزن ها را برای ساخت استراتژی جدید ارزیابی متقابل معرفی می کند و این استراتژی جدید با بازتاب مزیت های نسبی ورودی و خروجی ها، می تواند نتیجه شهودی تری حاصل کند. همچنین منحصر به فرد بودن راه حل بهینه برای استراتژی

جدید، به صورت نظری اثبات می شود و در نتیجه رویکرد کارایی متقابل *DEA* به طور بنیادی بهبود می یابد، سپس یک مدل کلی توسعه یافته بر مبنای استراتژی های مختلف ارائه می کند. استراتژی اولویت وزن ها می تواند به عنوان استراتژی کمکی به استراتژی های سنتی اضافه شود و در نتیجه، راه حل بهینه منحصر به فرد در حالی که ویژگی های استراتژی های سنتی حفظ می شود حاصل می گردد.

منابع

- [1] Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*, 2(6), 429–444. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(78\)90138-8](https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8)
- [2] Liu, J. S., Lu, L. Y. Y., & Lu, W. M. (2016). Research fronts in data envelopment analysis. *Omega*, 58, 33–45. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2015.04.004>
- [3] Sexton, T. R., Silkman, R. H., & Hogan, A. J. (1986). Data envelopment analysis: Critique and extensions. *New directions for program evaluation*, 1986(32), 73–105. <https://doi.org/10.1002/ev.1441>
- [4] Wu, J., Sun, J., & Liang, L. (2021). Methods and applications of DEA cross-efficiency: Review and future perspectives. *Frontiers of engineering management*, 8(2), 199–211. <https://doi.org/10.1007/s42524-020-0133-1>
- [5] Doyle, J., & Green, R. (1994). Efficiency and cross-efficiency in DEA: Derivations, meanings and uses. *Journal of the operational research society*, 45(5), 567–578. <https://doi.org/10.1057/jors.1994.84>
- [6] Balk, B. M., De Koster, M. B. M. R., Kaps, C., & Zofio, J. L. (2021). An evaluation of cross-efficiency methods: With an application to warehouse performance. *Applied mathematics and computation*, 406, 126261. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126261>
- [7] Liang, L., Wu, J., Cook, W. D., & Zhu, J. (2008). The DEA game cross-efficiency model and its Nash equilibrium. *Operations research*, 56(5), 1278–1288. <https://doi.org/10.1287/opre.1070.0487>
- [8] Wang, Y. M., & Chin, K. S. (2010). A neutral DEA model for cross-efficiency evaluation and its extension. *Expert systems with applications*, 37(5), 3666–3675. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2009.10.024>
- [9] Wu, J., Chu, J., Sun, J., & Zhu, Q. (2016). DEA cross-efficiency evaluation based on Pareto improvement. *European journal of operational research*, 248(2), 571–579. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.07.042>
- [10] Ang, S., Chen, M., & Yang, F. (2018). Group cross-efficiency evaluation in data envelopment analysis: An application to Taiwan hotels. *Computers & industrial engineering*, 125, 190–199. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2018.08.028>
- [11] Liu, H., Song, Y., & Yang, G. (2019). Cross-efficiency evaluation in data envelopment analysis based on prospect theory. *European journal of operational research*, 273(1), 364–375. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.07.046>
- [12] Contreras, I., Lozano, S., & Hinojosa, M. A. (2021). A DEA cross-efficiency approach based on bargaining theory. *Journal of the operational research society*, 72(5), 1156–1167. <https://doi.org/10.1080/01605682.2020.1755898>
- [13] Dellnitz, A., Reucher, E., & Kleine, A. (2021). Efficiency evaluation in data envelopment analysis using strong defining hyperplanes: A cross-efficiency framework. *Or spectrum*, 43, 441–465. <https://doi.org/10.1007/s00291-021-00623-2>
- [14] Jin, F., Cai, Y., Pedrycz, W., & Liu, J. (2022). Efficiency evaluation with regret-rejoice cross-efficiency DEA models under the distributed linguistic environment. *Computers & industrial engineering*, 169, 108281. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108281>
- [15] Wu, J., Liang, L., & Yang, F. (2009). Determination of the weights for the ultimate cross efficiency using Shapley value in cooperative game. *Expert systems with applications*, 36(1), 872–876. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2007.10.006>
- [16] Wang, Y. M., & Chin, K. S. (2011). The use of OWA operator weights for cross-efficiency aggregation. *Omega*, 39(5), 493–503. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2010.10.007>
- [17] Yang, G., Yang, J., Liu, W., & Li, X. (2013). Cross-efficiency aggregation in DEA models using the evidential-reasoning approach. *European journal of operational research*, 231(2), 393–404. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.05.017>
- [18] Chen, L., Wang, Y. M., & Huang, Y. (2020). Cross-efficiency aggregation method based on prospect consensus process. *Annals of operations research*, 288(1), 115–135. <https://doi.org/10.1007/s10479-019-03491-w>
- [19] Karagiannis, G. (2024). Cross-Efficiency aggregation based on the denominator rule. *Expert systems with applications*, 238, 121916. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2023.121916>
- [20] Ravanos, P., & Karagiannis, G. (2024). On value efficiency analysis and targeted benevolence cross efficiency. *Journal of the operational research society*, 75(11), 2101–2114. <https://doi.org/10.1080/01605682.2024.2303080>
- [21] Zhang, W., Wu, X., & Shi, J. (2023). Cross efficiency model of network DEA and its application on low carbon efficiency evaluation of multimodal transport. *Ocean & coastal management*, 244, 106778.
- [22] Liao, L. H., Chen, L., & Chang, Y. (2023). A new cross-efficiency DEA approach for measuring the safety efficiency of China's construction industry. *Kybernetes*, 52(12), 6379–6394. <https://doi.org/10.1108/K-06-2022-0880>
- [23] Wang, Y. M., & Luo, Y. (2006). DEA efficiency assessment using ideal and anti-ideal decision making units. *Applied mathematics and computation*, 173(2), 902–915. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.04.023>
- [24] Gong, X., Yu, C., Min, L., & Ge, Z. (2021). Regret theory-based fuzzy multi-objective portfolio selection model involving DEA cross-efficiency and higher moments. *Applied soft computing*, 100, 106958. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106958>
- [25] Shi, H. L., Chen, S. Q., Chen, L., & Wang, Y. M. (2021). A neutral cross-efficiency evaluation method based on interval reference points in consideration of bounded rational behavior. *European journal of operational research*, 290(3), 1098–1110. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.08.055>
- [26] Cooper, A. C. W. W., & Charnes, W. (1962). Programming with linear fractional functionals. *Naval research logistics quarterly*, 9(3–4), 181–186. <https://doi.org/10.1002/nav.3800090303>