



Paper Type: Original Article



Using the Network Malmquist Productivity Index in Interpreting the Performance of Petrochemical Companies

Amir Reza Bazargan* *Department of Industrial Engineering, Sirjan Branch, Islamic Azad University, Kerman, Iran; parsian_26@yahoo.com.*

Citation:



Bazargan, A. R. (2024). Using the network malmquist productivity index in interpreting the performance of petrochemical companies. *Management: Modeling, analysis and applications*, 1(2), 120-149.

Received: 17/12/2023

Reviewed: 27/02/2024

Revised: 10/04/2024

Accepted: 05/05/2024

Abstract

Purpose: This study aims to evaluate the performance and productivity of Iranian petrochemical companies using the network Malmquist productivity index. Given the key role of the petrochemical industry in the national economy, accurately analyzing efficiency and technological changes in this sector is of great importance. Accordingly, this research develops a network-based model grounded in Data Envelopment Analysis (DEA) to provide a more realistic representation of the multi-stage performance of petrochemical supply chains.

Methodology: The research employs network DEA models to assess both cumulative and overall efficiencies. The Malmquist productivity index was utilized as the primary tool for measuring productivity changes during the period 2016–2019. Data from 20 petrochemical units were analyzed across three consecutive periods (2016–2017, 2017–2018, and 2018–2019), and efficiency indices were calculated under both input- and output-oriented models.

Findings: The results indicate that most petrochemical units experienced productivity growth during the study period, while only a few, such as Unit 4, showed regression. Unit 15 achieved the highest improvement among all units. Overall, productivity enhancement across most units was driven by technological progress and improvements in technical efficiency, as reflected by Malmquist indices greater than one.

Originality/Value: The originality of this research lies in the development and implementation of a network-based Malmquist productivity model for evaluating petrochemical supply chains, which considers internal structures and feedback relationships among sub-processes. The findings provide valuable insights for managers and policymakers to identify performance gaps, enhance efficiency and productivity, and extend the proposed methodology to other energy-intensive industries.

Keywords: Performance evaluation, Network data envelopment analysis, Malmquist productivity index.



Corresponding Author: parsian_26@yahoo.com

<https://doi.org/10.22105/mmaa.v1i2.81>

Licensee. **Management: Modeling, Analysis and Application**. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



استفاده از شاخص بهره‌وری مالمکوئیست شبکه‌ای در تفسیر عملکرد شرکت‌های پتروشیمی

امیررضا بازرگان*

گروه مهندسی صنایع، واحد سیرجان، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمان، ایران.

چکیده

هدف: این پژوهش با هدف ارزیابی عملکرد و بهره‌وری شرکت‌های پتروشیمی کشور با استفاده از شاخص بهره‌وری مالمکوئیست شبکه‌ای انجام شده است. با توجه به نقش کلیدی صنعت پتروشیمی در اقتصاد ملی، تحلیل دقیق کارایی و تغییرات فناوری در این بخش از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این راستا، تحقیق حاضر می‌کوشد با توسعه مدلی شبکه‌ای مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها^۱، تصویری واقعی‌تر از عملکرد چندمرحله‌ای زنجیره‌تامین پتروشیمی‌ها ارائه دهد.

روش‌شناسی پژوهش: در این مطالعه از مدل DEA شبکه‌ای برای ارزیابی کارایی تجمعی و کارایی کل استفاده شده است. شاخص بهره‌وری مالمکوئیست به‌عنوان ابزار اصلی سنجش تغییرات بهره‌وری در بازه زمانی ۱۳۹۵ تا ۱۳۹۸ به‌کار رفته است. داده‌های ۲۰ واحد پتروشیمی کشور در سه دوره زمانی متوالی (۹۶-۹۵، ۹۷-۹۶، ۹۸-۹۷) تحلیل و شاخص‌های کارایی در دو ماهیت ورودی و خروجی محاسبه شدند.

یافته‌ها: نتایج نشان داد بیشتر واحدهای مورد بررسی در طول دوره مطالعه با رشد بهره‌وری مواجه بوده‌اند و تنها چند واحد از جمله واحد چهارم دچار پسرفت عملکردی شدند. واحد شماره ۱۵ بالاترین میزان پیشرفت را داشته است. به‌طور کلی، افزایش بهره‌وری در اکثر واحدها ناشی از پیشرفت فناوری و بهبود کارایی فنی بوده و شاخص مالمکوئیست در اغلب موارد مقادیر بالاتر از یک را نشان داده است.

اصالت/ارزش افزوده علمی: نوآوری این پژوهش در ارائه و پیاده‌سازی مدل شبکه‌ای شاخص مالمکوئیست برای ارزیابی زنجیره‌تامین پتروشیمی است که ساختار درونی و روابط بازگشتی میان زیرواحدها را نیز در نظر می‌گیرد. نتایج حاصل می‌تواند به مدیران و سیاست‌گذاران کمک کند تا نقاط قوت و ضعف واحدها را شناسایی کرده، در جهت بهبود کارایی و بهره‌وری گام بردارند و از این الگو در سایر صنایع انرژی‌محور نیز بهره‌گیرند.

کلیدواژه‌ها: ارزیابی عملکرد، تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای، شاخص بهره‌وری مالمکوئیست.

۱- مقدمه

بسیاری از واحدهای تصمیم‌گیری^۲ بیش از یک مرحله دارند. برای ارزیابی عملکرد این نوع از واحدها به کمک DEA نمی‌توان کل DMU را مانند یک جعبه سیاه در نظر گرفت بلکه می‌بایست به روابط درونی آن نیز توجه نمود. روش‌های مختلفی برای ارزیابی کارایی واحدهای چندمرحله‌ای ارائه شده است. یکی از روش‌های مرسوم جهت اندازه‌گیری کارایی، روش DEA می‌باشد. یکی از چالش‌های بزرگ سازمان‌ها در محاسبه بهره‌وری، وجود زیرمجموعه‌هایی می‌باشد که با هم دیگر ارتباط علت و معلولی دارند و مهم‌تر آن‌که عامل زمان بر روی عملکرد آن‌ها تاثیر به‌سزایی دارد؛ لذا تحلیل و ارزیابی سازمان نیازمند رسم نقشه بر اساس مدل‌های پویا با در نظر گرفتن عامل زمان می‌باشد.

¹ Data Envelopment Analysis (DEA)

² Decision Making Units (DMUs)

زنجیره‌های تامین از جمله واحدهایی هستند که بیش از یک مرحله دارند و در برخی از آن‌ها عوامل برگشت پذیر وجود دارد؛ بنابراین، ارایه مدل‌هایی جهت ارزیابی کارایی واحدهای چند مرحله‌ای با حضور عوامل برگشت پذیر، ضروری به نظر می‌رسد.

ارزیابی عملکرد سازمان‌ها در جهت‌گیری تصمیمات استراتژیک آتی آن‌ها نقش اساسی دارد. در این راستا می‌بایست میزان کارایی و بهره‌وری سازمان‌ها مورد محاسبه قرار گیرد تا از این طریق در تصمیم‌سازی‌های آتی روند رشد اقتصادی آن‌ها برنامه‌ریزی گردد. کارایی، یکی از مهم‌ترین شاخص‌های ارزیابی عملکرد بهینه واحدهای اقتصادی است. شرکت‌های پتروشیمی نیز یکی از مهم‌ترین ارکان اقتصاد کشور هستند که می‌توانند با عملیات خود، شرایط مناسبی را برای رشد و پیشرفت در بخش‌های مختلف اقتصاد یک کشور فراهم آورند. در کشور ما نیز به سبب وابستگی شدید اقتصاد کشور به این صنعت، اهمیت پتروشیمی صد چندان می‌گردد.

موضوع این تحقیق ارایه مدل ارزیابی عملکرد زنجیره‌تأمین پتروشیمی و همچنین اندازه‌گیری شاخص مالمکوئیست مبتنی بر شبکه برای اندازه‌گیری بهره‌وری می‌باشد. سوال اصلی تحقیق آن است که چگونه می‌توانیم در یک مدل شبکه‌ای، مدلی ریاضی برای اندازه‌گیری عملکرد سازمان ایجاد نماییم، به‌طوری‌که بتوانیم بهره‌وری را به کمک کارایی تجمعی و کارایی کل محاسبه نماییم، ارایه دهیم. مدل شبکه‌ای ارایه‌شده نیز دارای روابط بازگشتی بوده که شبکه آن کاملاً منحصر به فرد می‌باشد و همچنین استفاده از روابط بهره‌وری مالمکوئیست شبکه‌ای با ساختار شبکه‌ای شامل روابط برگشتی از مواردی است که کاملاً بدیع می‌باشد. در نهایت سنجش بهره‌وری از پتروشیمی‌های کشور که اطلاعات آن‌ها در سه طبقه مدلسازی شده است، انجام می‌پذیرد.

در بخش ۲ به مرور مقدمات DEA و زنجیره‌تأمین می‌پردازیم. در بخش ۳ مدلسازی DEA برای ارزیابی بهره‌وری به کمک کارایی تجمعی و کارایی کل در زنجیره، در صنعت پتروشیمی، ارایه خواهد شد. در بخش ۴ به ارایه یک مثال کاربردی خواهیم پرداخت و مدل‌های ارایه‌شده را برای آن پیاده‌سازی خواهیم کرد. در بخش ۵ به نتیجه‌گیری و پیشنهادها می‌پردازیم.

۲- مقدمات DEA و زنجیره‌تأمین

۲-۱- مفاهیم و اصول DEA

فرض کنید n تا DMU داریم و هر DMU_j ($j=1, \dots, n$) با استفاده از m ورودی X_{ij} ($i=1, \dots, m$)، خروجی Y_{rj} ($r=1, \dots, s$) را تولید می‌کند. DEA اندازه‌گیری عملکرد را برای DMU_o به طریق زیر محاسبه می‌کند. مدل (۱)، CCR با ماهیت ورودی در فرم پوششی مشهور است [1].

$$\text{Min } \theta$$

s. t.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{io}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}, \quad r = 1, 2, \dots, s,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

توجه کنید که مدل (۱) همواره شدنی است و $0 < \theta^* \leq 1$. اگر $\theta^* = 1$ در این صورت DMU_o کارا در غیر این صورت ناکارا است. دوآل، فرم پوششی که معروف به فرم (صورت) مضربی است، چنین می‌باشد:

$$\text{Max } \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}, \quad (2)$$

s. t.

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^s v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1,$$

$$u_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

۲-۲- DEA شبکه‌ای

DEA شبکه‌ای مدل‌های مرسوم DEA ، $DMUs$ را جعبه‌های سیاهی می‌انگارند و ساختار درونی آن‌ها را در نظر نمی‌گیرند [2]. به همین دلیل فار [3] در سال ۱۹۹۱ و نیز فار و گراسکف در سال ۱۹۹۶ [4]، [5] برای غلبه بر این مشکل و سهل‌انگاری در محاسبه‌ی کارایی، مبحث DEA شبکه‌ای را مطرح کردند. آن‌ها معتقدند که مدل‌های مرسوم DEA فرآیندهای سازمانی $DMUs$ را در بررسی‌های خود نادیده می‌انگارند و به سازمان‌ها و $DMUs$ به‌عنوان جعبه سیاهی می‌نگرند که در آن‌ها ورودی‌ها به‌خروجی‌هایی تبدیل می‌شود و ساختار درونی این واحدها در ارزیابی لحاظ نمی‌شود؛ درحالی‌که برای کمک به بهبود عملکرد لازم است فرآیندهای مختلف سازمان در مراحل مختلف بررسی شده و بخش‌های موفق از ناموفق متمایز شود [6]. در میان مدل‌های مرسوم DEA دو رویکرد متداول برای اندازه‌گیری کارایی سازمان‌های چند بخشی وجود دارد:

۱. تجمیع (جعبه سیاه): در یک رویکرد ساده بخش‌ها تجمیع شده و به‌عنوان یک شرکت در نظر گرفته می‌شوند. این رویکرد ارتباط فعالیت‌های داخلی را نادیده می‌گیرد و نمی‌تواند تاثیر ناکارایی بخش‌ها را بر کارایی کل شرکت محاسبه نماید. علاوه بر این در این حالت امکان انتخاب نامناسب ورودی‌ها و خروجی‌ها و ارزیابی غیر منطقی DMU وجود دارد.
۲. تفکیک: رویکرد دوم، اندازه‌گیری کارایی بخش‌ها به‌صورت منفرد است. در این روش می‌توان کارایی هر بخش شرکت را در میان $DMUs$ اندازه‌گیری نمود. اما این رویکرد برای تداوم ارتباط بین بخش‌ها کاربرد ندارد. شکل ۱ را در نظر بگیرید.

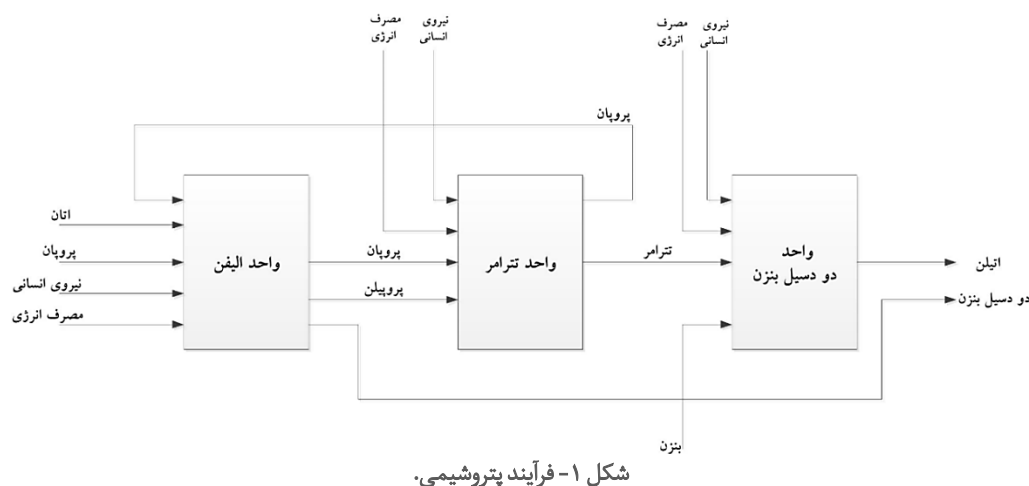


Figure 1- Petrochemical process.

شکل کلی یک سیستم دو مرحله‌ای را در نظر بگیرید که در آن O ، I ، Z به‌ترتیب ورودی، خروجی $DMUs$ و ارتباط میانی مابین زیرواحدها می‌باشند. خروجی‌های زیر واحد اول ورودی زیر واحد دوم می‌شوند. زیر واحد دوم هیچ ورودی برون‌زایی را مصرف نمی‌کند و زیر واحد اول هیچ خروجی برون‌زایی را تولید نمی‌کند. بنابراین، در سال ۲۰۰۸ مدل (۳) برای محاسبه کارایی یک DMU با ساختار دو مرحله‌ای شکل ۲ ارایه شد [7].

$$E_k^s = \max \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}}, \quad (3)$$

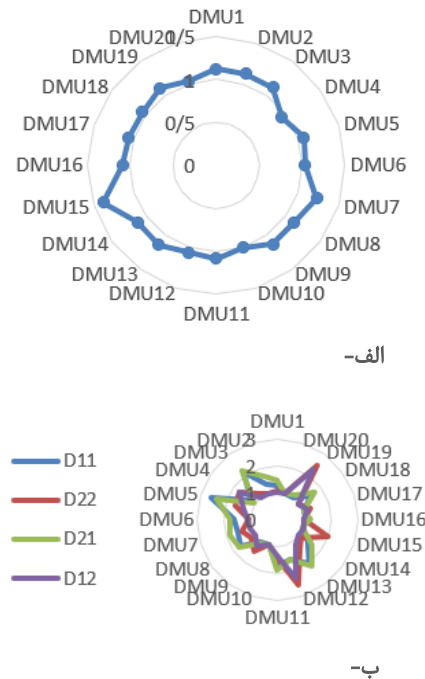
s. t.

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rk} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{p=1}^q w_p z_{pj} / \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} / \sum_{p=1}^q w_p z_{pj} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$u_r, v_i, w_p \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m, \quad p = 1, \dots, q.$$



شکل ۲- نمودارهای شاخص بهره‌وری مالمکوئیست؛ الف- شاخص بهره‌وری مالمکوئیست و ب- شاخص بهره‌وری مالمکوئیست.

Figure 2- Malmquist productivity index charts; a. Malmquist productivity index, and b. Malmquist productivity index.

۳-۲- شاخص بهره‌وری مالمکوئیست

المالکوئیست [8] اقتصاددان سوئدی در سال ۱۹۵۳، شاخصی به نام شاخص استاندارد زندگی المالمکوئیست معرفی نمود. این شاخص اولین بار در سال ۱۹۸۲ توسط کیوز و همکاران [9]، در تئوری تولید وارد شد. آن‌ها تعمیمی از اندازه تغییرات تکنولوژی تولید را در حالت چند ورودی و چند خروجی ارائه دادند. فار و همکاران [10] به منظور محاسبه شاخص المالمکوئیست از تکنیک‌های *DEA* استفاده نمودند. آن‌ها شاخص مذکور را به دو عامل تغییر در کارایی و تغییر در تکنولوژی تجزیه کردند. با استفاده از تکنیک برنامه‌ریزی خطی و *DEA* فارل [11] روش مناسبی برای ارزیابی تابع تولید تجربی برای چند ورودی و چند خروجی تعریف کرد در *DEA* بهترین مرز کارایی، بدون اولویتی برای خروجی‌ها و ورودی‌ها به وسیله مجموعه‌ای از *DMUs* به دست می‌آید *DMUs* روی مرز کارایی، واحدهایی با بیشترین سطح خروجی و یا با کمترین سطح ورودی هستند به تلفیق تغییرات کارایی هر واحد و تغییرات تکنولوژی، شاخص بهره‌وری المالمکوئیست تعریف می‌شود شاخص بهره‌وری المالمکوئیست را می‌توان از توابع فاصله زیر به کمک کارایی به دست آمده از مدل‌های *DEA* محاسبه کرد.

۳- شاخص بهره‌وری المالمکوئیست زنجیره‌تأمین پتروشیمی

با استفاده از تکنیک برنامه‌ریزی خطی و *DEA* فارل [11] روش مناسبی برای ارزیابی تابع تولید تجربی برای چند ورودی و چند خروجی تعریف کرد در *DEA* بهترین مرز کارایی، بدون اولویتی برای خروجی‌ها و ورودی‌ها به وسیله مجموعه‌ای از *DMUs* به دست می‌آید *DMUs* روی مرز

کارایی، واحدهایی با بیشترین سطح خروجی و یا با کمترین سطح ورودی هستند با تلفیق تغییرات کارایی هر واحد و تغییرات تکنولوژی، شاخص بهره‌وری مالکونیست تعریف می‌شود شاخص بهره‌وری مالکونیست را می‌توان از توابع فاصله زیر و یا توابع مشابه دیگری محاسبه نمود:

$$D(X_p, Y_p) = \inf\{\theta / (\theta X_p, Y_p) \in PPS\}, \quad (۴)$$

رابطه (۴) در حالت‌های خیلی خاص فقط تغییرات مرز کارایی در لحظه $t + 1$ ، نسبت به مرز کارایی در لحظه t را نشان می‌دهد و نمی‌تواند معیار مناسبی برای محاسبه تغییرات تکنولوژی باشد همچنین تغییرات کارایی نیز در این روش نادیده گرفته می‌شود. اگر $D^k(X^k, Y^k) = 1$ آن‌گاه واحد kth کارا فرض می‌شود این تابع فاصله مقدار ناکارایی را مشخص نمی‌کند فارل [11] با توجه به ناکارایی و خطی بودن مرز تکنولوژی، شاخص بهره‌وری را به دو عامل تجزیه کرد مرز کارایی با استفاده از تکنیک‌های DEA برای $DMUs$ مشخص می‌شود. تابع تولید در زمان t و $t + 1$ مفروض است و برای محاسبه شاخص مالکونیست به حل چهار مساله برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر نیاز است:

$$\begin{aligned} D^t(X_p^t, Y_p^t) &= \min \theta, \\ \text{s.t.} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^t &\leq \theta x_{ip}^t, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^t &\geq y_{rp}^t, \quad r = 1, \dots, s, \\ \lambda_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (۵)$$

که ix_{ip}^t ورودی و ry_{rp}^t خروجی از $DMUp$ در زمان t می‌باشد.

مقدار کارایی $D^t(X^t, Y^t) = \theta$ نشان می‌دهد که به چه میزان می‌توان از ورودی $DMUp$ کم کرد تا همان خروجی را تولید کند به جای زمان t ، مساله CCR را برای زمان $t + 1$ و $D^{t+1}(X^{t+1}, Y^{t+1})$ که کارایی تکنیکی $DMUp$ در زمان $t + 1$ است به دست می‌آید. مقدار $D^t(X^{t+1}, Y^{t+1})$ برای $DMUp$ که فاصله $DMUp$ در زمان $t + 1$ با مرز t است با استفاده از مساله برنامه‌ریزی خطی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} D^t(X_p^{t+1}, Y_p^{t+1}) &= \min \theta, \\ \text{s.t.} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^{t+1} &\leq \theta x_{ip}^{t+1}, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^{t+1} &\geq y_{rp}^{t+1}, \quad r = 1, \dots, s, \\ \lambda_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (۶)$$

به طور مشابه $D^{t+1}(X^t, Y^t)$ فاصله $DMUp$ با مختصات t نسبت به مرز کارایی $t + 1$ محاسبه می‌شود که برای محاسبه شاخص بهره‌وری مالکونیست در ماهیت ورودی لازم است این مقدار جواب بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی مدل (۷) است.

$$\begin{aligned} D^{t+1}(X_p^t, Y_p^t) &= \min \theta, \\ \text{s.t.} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^{t+1} &\leq \theta x_{ip}^t, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (۷)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}^{t+1} \geq y_{rp}^t, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

اگر بتوان فرض کرد که $D^t(X^t, Y^t)$ و $D^{t+1}(X^{t+1}, Y^{t+1})$ برای کارا بودن باید برابر یک باشند. بنابراین، تغییرات کارایی نسبی را تعریف کرد:

$$TEC_p = \frac{D_p^{t+1}(x_p^{t+1}, y_p^{t+1})}{D_p^t(x_p^t, y_p^t)}.$$

گوییم قطعه‌ای از مرز حرکت مثبت داشته است، اگر و فقط اگر این قطعه در زمان $t + 1$ نسبت به نقطه متناظر در زمان t ، مجموعه امکان تولید را گسترش داده و بزرگتر نماید.

گوییم قطعه‌ای از مرز حرکت منفی داشته، اگر و فقط اگر این قطعه در زمان $t + 1$ نسبت به نقطه متناظر در زمان t مجموعه امکان تولید را کوچکتر نماید و به سمت داخل حرکت کند. فار [3] میزان تغییرات تکنولوژی را بین زمان‌های t و $t + 1$ به صورت ترکیب هندسی بیان کرد:

$$FS_p = \sqrt{\frac{D_p^t(x_p^{t+1}, y_p^{t+1})}{D_p^{t+1}(x_p^{t+1}, y_p^{t+1})} \cdot \frac{D_p^t(x_p^t, y_p^t)}{D_p^{t+1}(x_p^t, y_p^t)}}.$$

برای شاخص تغییرات تکنولوژی سه حالت زیر رخ می‌دهد:

۱. $FS_p > 1$ باشد حرکت مرز مثبت بوده یا به عبارت دیگر پیشرفت مشاهده می‌شود.
۲. $FS_p < 1$ باشد حرکت مرز منفی بوده یا به عبارت دیگر پسرفت مشاهده می‌شود.
۳. $FS_p = 1$ نشان می‌دهد حرکت لازم نیست و یا مرز تغییر نمی‌کند.

شاخص بهره‌وری مالکونیست در ماهیت ورودی برای هر $DMUp$ در زمان‌های t و $t + 1$ از حاصل ضرب تغییرات کارایی و تغییرات تکنولوژی به دست می‌آید که به صورت رابطه زیر مطرح است.

$$M_p = \frac{D_p^{t+1}(x_p^{t+1}, y_p^{t+1})}{D_p^t(x_p^t, y_p^t)} \cdot \sqrt{\frac{D_p^t(x_p^{t+1}, y_p^{t+1})}{D_p^{t+1}(x_p^{t+1}, y_p^{t+1})} \cdot \frac{D_p^t(x_p^t, y_p^t)}{D_p^{t+1}(x_p^t, y_p^t)}}.$$

اگر رابطه بالا را ساده کنیم مقدار M_p برابر است با:

$$M_p = \sqrt{\frac{D_p^t(x_p^{t+1}, y_p^{t+1})}{D_p^t(x_p^t, y_p^t)} \cdot \frac{D_p^{t+1}(x_p^{t+1}, y_p^{t+1})}{D_p^{t+1}(x_p^t, y_p^t)}}.$$

این مقدار به صورت ترکیب هندسی محدب تعریف می‌شود زیرا به این وسیله کوچکترین ضعف موجود در کارایی‌ها مشخص می‌شود و کوچکترین تغییر در هر کدام از کارایی‌ها در شاخص بهره‌وری مالکونیست تاثیر می‌گذارد و سه حالت زیر ممکن است به وجود آید:

۱. $M_p > 1$ افزایش بهره‌وری را نشان می‌دهد و پیشرفت مشاهده می‌شود.
۲. $M_p < 1$ کاهش بهره‌وری را نشان می‌دهد و پسرفت مشاهده می‌شود.
۳. $M_p = 1$ نشان می‌دهد که هیچ تغییری در بهره‌وری برای زمان‌های t و $t + 1$ رخ نداده است.

حال با توجه به مفاهیم و فرمول‌های ارائه شده در قسمت بالا و همچنین در بخش مقدمات، روابط و فرمول‌های مالکونیست را محاسبه می‌کنیم. روابط زیر را برای ارزیابی بهره‌وری به کمک اندیس مالکونیست در نظر بگیریم.

$$M_o^{t1} = \left[\frac{D_o^{t1}(x_o^{t2}, y_o^{t2})}{D_o^{t1}(x_o^{t1}, y_o^{t1})} \right], \quad M_o^{t2} = \left[\frac{D_o^{t2}(x_o^{t2}, y_o^{t2})}{D_o^{t2}(x_o^{t1}, y_o^{t1})} \right],$$

$$M_o = \left[\frac{D_o^{t1}(x_o^{t2}, y_o^{t2})}{D_o^{t1}(x_o^{t1}, y_o^{t1})} \times \frac{D_o^{t2}(x_o^{t2}, y_o^{t2})}{D_o^{t2}(x_o^{t1}, y_o^{t1})} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$M_o = \frac{D_o^{t2}(x_o^{t2}, y_o^{t2})}{D_o^{t1}(x_o^{t1}, y_o^{t1})} \left[\frac{D_o^{t1}(x_o^{t2}, y_o^{t2})}{D_o^{t2}(x_o^{t2}, y_o^{t2})} \times \frac{D_o^{t1}(x_o^{t1}, y_o^{t1})}{D_o^{t2}(x_o^{t1}, y_o^{t1})} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

اندیس M_o معرف اندیس بهره‌وری مالمکوئیست است که به دو فاکتور قابل تجزیه است، تغییرات تکنولوژی و تغییرات مرز کارایی.

$$TEC_o = \frac{D_o^{t2}(x_o^{t2}, y_o^{t2})}{D_o^{t1}(x_o^{t1}, y_o^{t1})}.$$

$$FS_o = \left[\frac{D_o^{t1}(x_o^{t2}, y_o^{t2})}{D_o^{t2}(x_o^{t2}, y_o^{t2})} \times \frac{D_o^{t1}(x_o^{t1}, y_o^{t1})}{D_o^{t2}(x_o^{t1}, y_o^{t1})} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

محاسبه شاخص بهره‌وری مالمکوئیست برای سیستم با مدل فرم مضربی در ماهیت خروجی

ابتدا می‌خواهیم در مدل با ماهیت خروجی شاخص بهره‌وری مالمکوئیست را برای کل سیستم و همچنین طبقات سه‌گانه به‌دست بیاوریم برای به‌دست آوردن کارایی سیستم D_o در زمان‌های t_1 و t_2 مدل‌های زیر را در نظر بگیرید. ما بایستی چهار مقدار کارایی را متناسب با توضیحات یادشده بالا به‌دست آوریم.

۱. در مدل (۸) هم واحد تحت ارزیابی در زمان t_1 و مرز کارایی در زمان t_1 در نظر گرفته شده است.

$$D_o^{t1}(x_o^{t1}, y_o^{t1}) = \min \sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{io}^{1t1} + k_1 y_{1o}^{t1} + \sum_{f=1}^2 w_f z_{fo}^{t1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lo}^{2t1} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{po}^{3t1} + k_2 y_{2o}^{t1},$$

s. t.

$$u_1 d_{1o}^{t1} + u_2 d_{2o}^{t1} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t1} + k_1 y_{1j}^{t1} - \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t1} - u_1 d_{1j}^{t1} + t_0^1 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

$$\sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t1} - \sum_{r=1}^2 k_r y_{rj}^{t1} + t_0^2 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

(۸)

$$\sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t1} + k_2 y_{2j}^{t1} - u_2 d_{2j}^{t1} + t_0^3 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t1} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t1} - \sum_{r=1}^2 u_r d_{rj}^{t1} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t1} + k_1 y_{1j}^{t1} + \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t1} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t1} + k_2 y_{2j}^{t1} - u_1 d_{1j}^{t1} - u_2 d_{2j}^{t1} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

$$k_r \geq 0, \quad v_l^1 \geq 0, \quad v_l^2 \geq 0, \quad v_p^3 \geq 0, \quad w_f \geq 0, \quad u_s \geq 0, \quad \text{for all } r, i, l, p, f, s.$$

$$t_0^1, t_0^2, t_0^3, t \quad \text{Free.}$$

جواب بهین مدل (۸) معرف کارایی تجمعی واحد تحت ارزیابی در زمان t_1 است.

۲. در مدل (۹) هم واحد تحت ارزیابی در زمان t_2 و هم مرز کارایی در زمان t_2 در نظر گرفته شده است.

$$D_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2}) = \text{Min} \sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{io}^{1t_2} + k_1 y_{1o}^{t_2} + \sum_{f=1}^2 w_f z_{fo}^{t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lo}^{2t_2} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{po}^{3t_2} + k_2 y_{2o}^{t_2},$$

s. t.

$$u_1 d_{1o}^{t_2} + u_2 d_{2o}^{t_2} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_2} + k_1 y_{1j}^{t_2} - \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_2} - u_1 d_{1j}^{t_2} + t_0^1 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_2} - \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_2} + \sum_{r=1}^2 k_r y_{rj}^{t_2} + t_0^2 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

(۹)

$$\sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_2} + k_2 y_{2j}^{t_2} - u_2 d_{2j}^{t_2} + t_0^3 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_2} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_2} - \sum_{r=1}^2 u_r d_{rj}^{t_2} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_2} + k_1 y_{1j}^{t_2} + \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_2} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_2} + k_2 y_{2j}^{t_2} - u_1 d_{1j}^{t_2} - u_2 d_{2j}^{t_2} \geq 0, j = 1, \dots, n,$$

$$k_r \geq 0, \quad v_i^1 \geq 0, \quad v_l^2 \geq 0, \quad v_p^3 \geq 0, \quad w_f \geq 0, \quad u_s \geq 0, \quad \text{for all } r, i, l, p, f, s.$$

$$t_0^1, t_0^2, t_0^3 \quad \text{Free.}$$

جواب بهین مدل فوق معرف کارایی تجمعی واحد تحت ارزیابی در زمان t_2 است.

۳. در مدل (۱۰) واحد تحت ارزیابی در زمان t_2 و مرز کارایی در زمان t_1 در نظر گرفته شده است.

$$D_o^{t_1}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2}) = \text{Min} \sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{io}^{1t_2} + k_1 y_{1o}^{t_2} + \sum_{f=1}^2 w_f z_{fo}^{t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lo}^{2t_2} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{po}^{3t_2} + k_2 y_{2o}^{t_2},$$

s. t.

$$u_1 d_{1o}^{t_2} + u_2 d_{2o}^{t_2} = 1.$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_1} + k_1 y_{1j}^{t_1} - \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_1} - u_1 d_{1j}^{t_1} + t_0^1 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (10)$$

$$\sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_1} - \sum_{r=1}^2 k_r y_{rj}^{t_1} + t_0^2 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_1} + k_2 y_{2j}^{t_1} - u_2 d_{2j}^{t_1} + t_0^3 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_1} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_1} - \sum_{r=1}^2 u_r d_{rj}^{t_1} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_2} + k_1 y_{1j}^{t_2} + \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_2} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_2} + k_2 y_{2j}^{t_2} - u_1 d_{1j}^{t_2} - u_2 d_{2j}^{t_2} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$k_r \geq 0, \quad v_i^1 \geq 0, \quad v_l^2 \geq 0, \quad v_p^3 \geq 0, \quad w_f \geq 0, \quad u_s \geq 0, \quad \text{for all } r, i, l, p, f, s.$$

$$t_0^1, t_0^2, t_0^3 \text{ Free.}$$

از آنجا که کارایی تجمعی واحد تحت ارزیابی در زمان t_2 و مرز کارایی در زمان t_1 در نظر گرفته شده لذا مقدار بهین تابع هدف مدل فوق معرف کارایی نمی باشد.

۴. در مدل (۱۱) واحد تحت ارزیابی در زمان t_1 و مرز کارایی در زمان t_2 در نظر گرفته شده است.

$$D_o^{t_2}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1}) = \text{Min} \sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{io}^{1t_1} + k_1 y_{1o}^{t_1} + \sum_{f=1}^2 w_f z_{fo}^{t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lo}^{2t_1} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{po}^{3t_1} + k_2 y_{2o}^{t_1},$$

s. t.

$$u_1 d_{1o}^{t_1} + u_2 d_{2o}^{t_1} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_2} + k_1 y_{1j}^{t_2} - \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_2} - u_1 d_{1j}^{t_2} + t_0^1 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_2} - \sum_{r=1}^2 k_r y_{rj}^{t_2} + t_0^2 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_2} + k_2 y_{2j}^{t_2} - u_2 d_{2j}^{t_2} + t_0^3 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

(۱۱)

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_2} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_2} - \sum_{r=1}^2 u_r d_{rj}^{t_2} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_1} + k_1 y_{1j}^{t_1} + \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_1} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_1} + k_2 y_{2j}^{t_1} - u_1 d_{1j}^{t_1} - u_2 d_{2j}^{t_1} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$k_r \geq 0, \quad v_i^1 \geq 0, \quad v_l^2 \geq 0, \quad v_p^3 \geq 0, \quad w_f \geq 0, \quad u_s \geq 0, \quad \text{for all } r, i, l, p, f, s,$$

$$t_0^1, t_0^2, t_0^3 \text{ Free.}$$

از آنجا که کارایی تجمعی واحد تحت ارزیابی در زمان t_1 و مرز کارایی در زمان t_2 در نظر گرفته شده لذا مقدار بهین تابع هدف مدل فوق معرف کارایی نمی باشد.

به این ترتیب اندیس بهره‌وری مالمکوئیست را با توجه به کارایی تجمعی در یک شبکه به کمک رابطه زیر به دست می آوریم.

$$M_o = \frac{D_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{D_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} \left[\frac{D_o^{t_1}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{D_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})} \times \frac{D_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})}{D_o^{t_2}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

در صورتی که مقدار M_o بزرگتر از یک، کوچکتر و مساوی یک باشد، به ترتیب نشان‌دهنده رشد، کاهش و عدم تغییر بهره‌وری واحد مورد نظر بوده با توجه به در نظر گرفتن کارایی تجمعی می‌باشد و در صورتی که مقدار TEC بزرگتر از یک، کوچکتر مساوی یک باشد، به ترتیب نشان‌دهنده رشد، کاهش عدم تغییر کارایی تجمعی فنی واحد مورد نظر می‌باشد و در صورتی که مقدار FS بزرگتر از یک، کوچکتر و مساوی یک باشد، به ترتیب نشان‌دهنده پیشرفت تکنولوژی (نزدیک شدن مرز به سمت مرکز و یا بزرگ شدن مجموعه امکان تولید) و عدم تغییر تکنولوژی و یا مرز کارایی در طی زمان می‌باشد.

حال با توجه به مقادیر مختلف دو جزء FS_o حالت‌های مختلف ذیل قابل بررسی می‌باشد:

$$\text{حالت A: } \frac{D_o^{t_1}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{D_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})} > 1 \text{ و } \frac{D_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})}{D_o^{t_2}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} > 1$$

در این حالت DMU_o در هر دو زمان، در قسمتی از مجموعه امکان تولید قرار دارد که پیشرفت تکنولوژی اتفاق افتاده و مرز PPS دارای انتقال مثبت بوده و مقدار $FS_o > 1$ می‌باشد. این حالت، بهترین حالت می‌باشد.

$$\text{حالت B: } \frac{D_o^{t_1}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{D_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})} < 1 \text{ و } \frac{D_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})}{D_o^{t_2}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} < 1$$

در این حالت DMU_o در هر دو زمان، در قسمتی از مجموعه امکان تولید قرار دارد که پسرفت تکنولوژی اتفاق افتاده و مرز PPS دارای انتقال منفی بوده و مقدار $FS_o < 1$ می‌باشد. این حالت بدترین حالت می‌باشد.

$$\text{حالت C: } \frac{D_o^{t_1}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{D_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})} > 1 \text{ و } \frac{D_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})}{D_o^{t_2}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} < 1$$

در این حالت، ممکن است $FS_o < 1$ یا $FS_o > 1$ باشد و می‌توان نتیجه‌گیری کرد که DMU_o از قسمتی از PPS که دارای پسرفت تکنولوژی بوده است، به قسمتی که دارای پیشرفت تکنولوژی می‌باشد، حرکت نمود و تغییر استراتژی DMU_o در استفاده از ورودی‌های مختلف مفید بوده است. حال اگر مقدار پیشرفت تکنولوژی در زمان t^2 پسرفت حادث شده در زمان t^1 را بتواند جبران نماید $FS_o > 1$ و در غیر این صورت $FS_o < 1$ خواهد بود.

$$\text{حالت D: } \frac{D_o^{t_1}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{D_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})} < 1 \text{ و } \frac{D_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})}{D_o^{t_2}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} > 1$$

در این حالت، ممکن است $FS_o < 1$ یا $FS_o > 1$ باشد و می‌توان نتیجه‌گیری کرد که DMU_o از قسمتی از PPS که دارای پیشرفت تکنولوژی بوده است به قسمتی که دارای پسرفت تکنولوژی می‌باشد، حرکت نموده و تغییر استراتژی DMU_o در استفاده از ورودی‌های مختلف مفید نبوده است.

محاسبه شاخص بهره‌وری مالکونیست برای سیستم با مدل فرم مضربی در ماهیت ورودی

با توجه به روابط یادشده بالا و دقیقاً مشابه منطق ماهیت خروجی می‌توانیم شاخص بهره‌وری مالکونیست را با توجه به کارایی کل شبکه نیز تعریف کنیم، لذا مدل‌های چهارگانه زیر را در شرایط‌های زمانی مختلف در نظر می‌گیریم:

۱. در مدل زیر هم واحد تحت ارزیابی در زمان t_1 و هم مرز کارایی در زمان t_1 در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} \bar{D}_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1}) &= \text{Min} \sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{io}^{1t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lo}^{2t_1} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{po}^{3t_1}, \\ &\text{s. t.} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\sum_{r=1}^2 u_r d_{ro}^{t_1} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_1} + k_1 y_{1j}^{t_1} - \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_1} - u_1 d_{1j}^{t_1} + t_0^1 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_1} - \sum_{r=1}^2 k_r y_{rj}^{t_1} + t_0^2 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_1} + k_2 y_{2j}^{t_1} - u_2 d_{2j}^{t_1} + t_0^3 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_1} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_1} - \sum_{r=1}^2 u_r d_{rj}^{t_1} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$k_r \geq 0, \quad v_i^1 \geq 0, \quad v_l^2 \geq 0, \quad v_p^3 \geq 0, \quad w_f \geq 0, \quad u_s \geq 0, \quad \text{for all } r, i, l, p, f, s.$$

$$t_0^1, t_0^2, t_0^3 \text{ Free.}$$

جواب بهین مدل فوق معرف کارایی کل واحد تحت ارزیابی در زمان t_1 است.

۲. در مدل (۱۳) هم واحد تحت ارزیابی در زمان t_2 و هم مرز کارایی در زمان t_2 در نظر گرفته شده است.

$$\bar{D}_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2}) = \text{Min} \sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{io}^{1t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lo}^{2t_2} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{po}^{3t_2}$$

s. t.

$$\sum_{r=1}^2 u_r d_{ro}^{t_2} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_2} + k_1 y_{1j}^{t_2} - \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_2} - u_1 d_{1j}^{t_2} + t_0^1 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

(۱۳)

$$\sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_2} - \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_2} + \sum_{r=1}^2 k_r y_{rj}^{t_2} + t_0^2 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_2} + k_2 y_{2j}^{t_2} - u_2 d_{2j}^{t_2} + t_0^3 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_2} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_2} - \sum_{r=1}^2 u_r d_{rj}^{t_2} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$k_r \geq 0, \quad v_i^1 \geq 0, \quad v_l^2 \geq 0, \quad v_p^3 \geq 0, \quad w_f \geq 0, \quad u_s \geq 0, \quad \text{for all } r, i, l, p, f, s,$$

$$t_0^1, t_0^2, t_0^3 \text{ Free.}$$

جواب بهین مدل فوق معرف کارایی کل واحد تحت ارزیابی در زمان t_2 است.

۳. در مدل (۱۴) واحد تحت ارزیابی در زمان t_2 و مرز کارایی در زمان t_1 در نظر گرفته شده است.

$$D_o^{t_1}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2}) = \text{Min} \sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{io}^{1t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lo}^{2t_2} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{po}^{3t_2}, \quad (14)$$

s. t.

$$\sum_{r=1}^2 u_r d_{ro}^{t_2} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_1} + k_1 y_{1j}^{t_1} - \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_1} - u_1 d_{1j}^{t_1} + t_0^1 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_1} - \sum_{r=1}^2 k_r y_{rj}^{t_1} + t_0^2 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_1} + k_2 y_{2j}^{t_1} - u_2 d_{2j}^{t_1} + t_0^3 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_1} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_1} - \sum_{r=1}^2 u_r d_{rj}^{t_1} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{io}^{1t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lo}^{2t_2} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{po}^{3t_2} - \sum_{r=1}^2 u_r d_{ro}^{t_2} \geq 0,$$

$$k_r \geq 0, \quad v_l^1 \geq 0, \quad v_l^2 \geq 0, \quad v_p^3 \geq 0, \quad w_f \geq 0, \quad u_s \geq 0, \quad \text{for all } r, i, l, p, f, s,$$

$$t_0^1, t_0^2, t_0^3 \quad \text{Free.}$$

از آن‌جا که کارایی کل واحد تحت ارزیابی در زمان t_2 و مرز کارایی در زمان t_1 در نظر گرفته شده لذا مقدار بهین تابع هدف مدل فوق معرف کارایی نمی‌باشد.

۴. در مدل (۱۵) واحد تحت ارزیابی در زمان t_1 و مرز کارایی در زمان t_2 در نظر گرفته شده است.

$$D_o^{t_2}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1}) = \text{Min} \sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{io}^{1t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lo}^{2t_1} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{po}^{3t_1},$$

s. t.

$$\sum_{r=1}^2 u_r d_{ro}^{t_1} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_2} + k_1 y_{1j}^{t_2} - \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_2} - u_1 d_{1j}^{t_2} + t_0^1 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (15)$$

$$\sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_2} - \sum_{r=1}^2 k_r y_{rj}^{t_2} + t_0^2 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_2} - \sum_{r=1}^2 k_r y_{rj}^{t_2} + t_0^2 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_2} + k_2 y_{2j}^{t_2} - u_2 d_{2j}^{t_2} + t_0^3 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_2} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_2} - \sum_{r=1}^2 u_r d_{rj}^{t_2} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{io}^{1t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lo}^{2t_1} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{po}^{3t_1} - \sum_{r=1}^2 u_r d_{ro}^{t_1} \geq 0,$$

$$k_r \geq 0, \quad v_l^1 \geq 0, \quad v_l^2 \geq 0, \quad v_p^3 \geq 0, \quad w_f \geq 0, \quad u_s \geq 0, \quad \text{for all } r, i, l, p, f, s.$$

$$t_0^1, t_0^2, t_0^3 \text{ Free.}$$

از آن جا که کارایی کل واحد تحت ارزیابی در زمان t_1 و مرز کارایی در زمان t_2 در نظر گرفته شده لذا مقدار بهین تابع هدف مدل فوق معرف کارایی نمی باشد.

به این ترتیب اندیس بهره‌وری مالمکوئیست را با توجه به کارایی کل در یک شبکه به کمک رابطه زیر به دست می آوریم.

$$\bar{M}_o = \frac{\bar{D}_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{\bar{D}_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} \left[\frac{\bar{D}_o^{t_1}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{\bar{D}_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})} \times \frac{\bar{D}_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})}{\bar{D}_o^{t_2}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

در صورتی که مقدار $\bar{M}_o$ بزرگتر از یک، کوچکتر و مساوی یک باشد، به ترتیب نشان دهنده رشد، کاهش و عدم تغییر بهره‌وری واحد مورد نظر بوده با توجه به در نظر گرفتن کارایی کل می باشد و در صورتی که مقدار TEC بزرگتر از یک، کوچکتر مساوی یک باشد، به ترتیب نشان دهنده رشد، کاهش عدم تغییر کارایی کل فنی واحد مورد نظر می باشد و در صورتی که مقدار FS بزرگتر از یک، کوچکتر و مساوی یک باشد، به ترتیب نشان دهنده پیشرفت تکنولوژی (نزدیک شدن مرز به سمت مرکز و یا بزرگ شدن مجموعه امکان تولید) و عدم تغییر تکنولوژی و یا مرز کارایی در طی زمان می باشد.

حال با توجه به مقادیر مختلف دو جزء FS_o حالت های مختلف ذیل قابل بررسی می باشد:

$$\text{حالت A: } 1 < \frac{\bar{D}_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})}{\bar{D}_o^{t_2}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} \text{ و } 1 < \frac{\bar{D}_o^{t_1}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{\bar{D}_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}$$

در این حالت DMU_o در هر دو زمان، در قسمتی از مجموعه امکان تولید قرار دارد که پیشرفت تکنولوژی اتفاق افتاده و مرز PPS دارای انتقال مثبت بوده و مقدار $FS_o > 1$ می باشد. این حالت، بهترین حالت می باشد.

$$\text{حالت B: } 1 < \frac{\bar{D}_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})}{\bar{D}_o^{t_2}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} \text{ و } \frac{\bar{D}_o^{t_1}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{\bar{D}_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})} < 1$$

در این حالت DMU_o در هر دو زمان، در قسمتی از مجموعه امکان تولید قرار دارد که پسرفت تکنولوژی اتفاق افتاده و مرز PPS دارای انتقال منفی بوده و مقدار $FS_o < 1$ می باشد. این حالت بدترین حالت می باشد.

$$\text{حالت C: } \frac{\bar{D}_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})}{\bar{D}_o^{t_2}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} < 1 \text{ و } \frac{\bar{D}_o^{t_1}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{\bar{D}_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})} > 1$$

در این حالت، ممکن است $FS_o < 1$ یا $FS_o > 1$ باشد و می توان نتیجه گیری کرد که DMU_o از قسمتی از PPS که دارای پسرفت تکنولوژی بوده است، به قسمتی که دارای پیشرفت تکنولوژی می باشد، حرکت نمود و تغییر استراتژی DMU_o در استفاده از ورودی های مختلف مفید بوده است. حال اگر مقدار پیشرفت تکنولوژی در زمان t^2 پسرفت حادث شده در زمان t^1 را بتواند جبران نماید $FS_o > 1$ و در غیر این صورت $FS_o < 1$ خواهد بود.

$$\text{حالت D: } 1 < \frac{\bar{D}_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})}{\bar{D}_o^{t_2}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} \text{ و } \frac{\bar{D}_o^{t_1}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{\bar{D}_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})} < 1$$

در این حالت، ممکن است $FS_o < 1$ یا $FS_o > 1$ باشد و می‌توان نتیجه‌گیری کرد که DMU_o از قسمتی از PPS که دارای پیشرفت تکنولوژی بوده است، به قسمتی که دارای پسرفت تکنولوژی می‌باشد، حرکت نموده و تغییر استراتژی DMU_o در استفاده از ورودی‌های مختلف مفید نبوده است.

برای به‌دست آوردن D_o در زمان‌های t_1 و t_2 مدل‌های زیر را در نظر بگیرید. توجه داریم مدل ارزیابی‌کننده مدل ماهیت خروجی است.

۱. در مدل (۱۶) هم واحد تحت ارزیابی در زمان t_1 و هم مرز کارایی در زمان t_1 در نظر گرفته شده است.

$$G_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1}) = \text{Max} u_1 d_{1o}^{t_1} + u_2 d_{2o}^{t_1},$$

s. t.

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{io}^{1t_1} + k_1 y_{1o}^{t_1} + \sum_{f=1}^2 w_f z_{fo}^{t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lo}^{2t_1} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{po}^{3t_1} + k_2 y_{2o}^{t_1} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_1} + k_1 y_{1j}^{t_1} - \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_1} - u_1 d_{1j}^{t_1} + t_0^1 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_1} - \sum_{r=1}^2 k_r y_{rj}^{t_1} + t_0^2 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

(۱۶)

$$\sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_1} + k_2 y_{2j}^{t_1} - u_2 d_{2j}^{t_1} + t_0^3 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_1} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_1} - \sum_{r=1}^2 u_r d_{rj}^{t_1} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_1} + k_1 y_{1j}^{t_1} + \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_1} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_1} + k_2 y_{2j}^{t_1} - u_1 d_{1j}^{t_1} - u_2 d_{2j}^{t_1} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$k_r \geq 0, \quad v_i^1 \geq 0, \quad v_l^2 \geq 0, \quad v_p^3 \geq 0, \quad w_f \geq 0, \quad u_s \geq 0, \quad \text{for all } r, i, l, p, f, s.$$

$$t_0^1, t_0^2, t_0^3, t \quad \text{Free.}$$

جواب بهین مدل فوق معرف کارایی تجمعی واحد تحت ارزیابی در زمان t_1 است.

۲. در مدل (۱۷) هم واحد تحت ارزیابی در زمان t_2 و هم مرز کارایی در زمان t_2 در نظر گرفته شده است.

$$G_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2}) = \text{Max} u_1 d_{1o}^{t_2} + u_2 d_{2o}^{t_2},$$

s. t.

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{io}^{1t_2} + k_1 y_{1o}^{t_2} + \sum_{f=1}^2 w_f z_{fo}^{t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lo}^{2t_2} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{po}^{3t_2} + k_2 y_{2o}^{t_2} = 1,$$

(۱۷)

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_2} + k_1 y_{1j}^{t_2} - \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_2} - u_1 d_{1j}^{t_2} + t_0^1 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_2} - \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_2} + \sum_{r=1}^2 k_r y_{rj}^{t_2} + t_0^2 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_2} + k_2 y_{2j}^{t_2} - u_2 d_{2j}^{t_2} + t_0^3 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_2} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_2} - \sum_{r=1}^2 u_r d_{rj}^{t_2} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_2} + k_1 y_{1j}^{t_2} + \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_2} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_2} + k_2 y_{2j}^{t_2} - u_1 d_{1j}^{t_2} - u_2 d_{2j}^{t_2} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$k_r \geq 0, \quad v_i^1 \geq 0, \quad v_l^2 \geq 0, \quad v_p^3 \geq 0, \quad w_f \geq 0, \quad u_s \geq 0, \quad \text{for all } r, i, l, p, f, s,$$

$$t_0^1, t_0^2, t_0^3 \quad \text{Free.}$$

جواب بهین مدل فوق معرف کارایی تجمعی واحد تحت ارزیابی در زمان t_2 است.

۳. در مدل (۱۸) واحد تحت ارزیابی در زمان t_2 و مرز کارایی در زمان t_1 در نظر گرفته شده است.

$$G_o^{t_1}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2}) = \text{Min} u_1 d_{1o}^{t_2} + u_2 d_{2o}^{t_2},$$

s. t.

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{io}^{1t_2} + k_1 y_{1o}^{t_2} + \sum_{f=1}^2 w_f z_{fo}^{t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lo}^{2t_2} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{po}^{3t_2} + k_2 y_{2o}^{t_2} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_1} + k_1 y_{1j}^{t_1} - \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_1} - u_1 d_{1j}^{t_1} + t_0^1 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_1} - \sum_{r=1}^2 k_r y_{rj}^{t_1} + t_0^2 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_1} + k_2 y_{2j}^{t_1} - u_2 d_{2j}^{t_1} + t_0^3 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_1} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_1} - \sum_{r=1}^2 u_r d_{rj}^{t_1} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_2} + k_1 y_{1j}^{t_2} + \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_2} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_2} + k_2 y_{2j}^{t_2} - u_1 d_{1j}^{t_2} - u_2 d_{2j}^{t_2} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$k_r \geq 0, \quad v_i^1 \geq 0, \quad v_l^2 \geq 0, \quad v_p^3 \geq 0, \quad w_f \geq 0, \quad u_s \geq 0, \quad \text{for all } r, i, l, p, f, s,$$

$$t_0^1, t_0^2, t_0^3 \quad \text{Free.}$$

از آنجا که کارایی تجمعی واحد تحت ارزیابی در زمان t_2 و مرز کارایی در زمان t_1 در نظر گرفته شده لذا مقدار بهین تابع هدف مدل فوق معرف کارایی نمی باشد.

۴. در مدل (۱۹) واحد تحت ارزیابی در زمان t_1 و مرز کارایی در زمان t_2 در نظر گرفته شده است.

$$G_o^{t_2}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1}) = \text{Max} u_1 d_{1o}^{t_1} + u_2 d_{2o}^{t_1} \quad (19)$$

s. t.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{io}^{1t_1} + k_1 y_{1o}^{t_1} + \sum_{f=1}^2 w_f z_{fo}^{t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lo}^{2t_1} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{po}^{3t_1} + k_2 y_{2o}^{t_1} = 1 \\
 & \sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_2} + k_1 y_{1j}^{t_2} - \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_2} - u_1 d_{1j}^{t_2} + t_0^1 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_2} - \sum_{r=1}^2 k_r y_{rj}^{t_2} + t_0^2 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_2} + k_2 y_{2j}^{t_2} - u_2 d_{2j}^{t_2} + t_0^3 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_2} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_2} - \sum_{r=1}^2 u_r d_{rj}^{t_2} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & \sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_1} + k_1 y_{1j}^{t_1} + \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_1} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_1} + k_2 y_{2j}^{t_1} - u_1 d_{1j}^{t_1} - u_2 d_{2j}^{t_1} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\
 & k_r \geq 0, \quad v_i^1 \geq 0, \quad v_l^2 \geq 0, \quad v_p^3 \geq 0, \quad w_f \geq 0, \quad u_s \geq 0, \quad \text{for all } r, i, l, p, f, s, \\
 & t_0^1, t_0^2, t_0^3 \text{ Free.}
 \end{aligned}$$

از آن جا که کارایی تجمعی واحد تحت ارزیابی در زمان t_1 و مرز کارایی در زمان t_2 در نظر گرفته شده لذا مقدار بهین تابع هدف مدل فوق معرف کارایی نمی‌باشد.

به این ترتیب اندیس بهره‌وری مالک‌نویست را با توجه به کارایی تجمعی در یک شبکه به کمک رابطه زیر به دست می آوریم.

$$M_o = \frac{G_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{G_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} \left[\frac{G_o^{t_1}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{G_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})} \times \frac{G_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})}{G_o^{t_2}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

در صورتی که مقدار M_o بزرگتر از یک، کوچکتر و مساوی یک باشد، به ترتیب نشان‌دهنده رشد، کاهش و عدم تغییر بهره‌وری واحد مورد نظر بوده با توجه به در نظر گرفتن کارایی تجمعی می‌باشد و در صورتی که مقدار TEC بزرگتر از یک، کوچکتر مساوی یک باشد، به ترتیب نشان‌دهنده رشد، کاهش عدم تغییر کارایی تجمعی فنی واحد مورد نظر می‌باشد و در صورتی که مقدار FS بزرگتر از یک، کوچکتر و مساوی یک باشد، به ترتیب نشان‌دهنده پیشرفت تکنولوژی (نزدیک شدن مرز به سمت مرکز و یا بزرگ شدن مجموعه امکان تولید) و عدم تغییر تکنولوژی و یا مرز کارایی در طی زمان می‌باشد.

حال با توجه به مقادیر مختلف دو جزء FS_o حالت‌های مختلف ذیل قابل بررسی می‌باشد:

$$\text{حالت } A: 1 < \frac{G_o^{t_1}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{G_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})} > 1 \text{ و } \frac{G_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})}{G_o^{t_2}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} > 1$$

در این حالت DMU_o در هر دو زمان، در قسمتی از مجموعه امکان تولید قرارداد که پیشرفت تکنولوژی اتفاق افتاده و مرز PPS دارای انتقال مثبت بوده و مقدار $FS_o > 1$ می‌باشد. این حالت، بهترین حالت می‌باشد.

$$\text{حالت } B: 1 < \frac{G_o^{t_1}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{G_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})} < 1 \text{ و } \frac{G_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})}{G_o^{t_2}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} < 1$$

در این حالت DMU_o در هر دو زمان، در قسمتی از مجموعه امکان تولید قرار دارد که پسرفت تکنولوژی اتفاق افتاده و مرز PPS دارای انتقال منفی بوده و مقدار $FS_o < 1$ می باشد. این حالت بدترین حالت می باشد.

$$\text{حالت } C: \frac{G_o^{t1}(x_o^{t2}, y_o^{t2})}{G_o^{t2}(x_o^{t2}, y_o^{t2})} > 1 \text{ و } \frac{G_o^{t1}(x_o^{t1}, y_o^{t1})}{G_o^{t2}(x_o^{t1}, y_o^{t1})} < 1$$

در این حالت، ممکن است $FS_o < 1$ یا $FS_o > 1$ باشد و می توان نتیجه گیری کرد که DMU_o از قسمتی از PPS که دارای پسرفت تکنولوژی بوده است، به قسمتی که دارای پیشرفت تکنولوژی می باشد، حرکت نمود و تغییر استراتژی DMU_o در استفاده از ورودی های مختلف مفید بوده است. حال اگر مقدار پیشرفت تکنولوژی در زمان t^2 پسرفت حادث شده در زمان t^1 را بتواند جبران نماید $FS_o > 1$ و در غیر این صورت $FS_o < 1$ خواهد بود.

$$\text{حالت } D: \frac{G_o^{t1}(x_o^{t2}, y_o^{t2})}{G_o^{t2}(x_o^{t2}, y_o^{t2})} < 1 \text{ و } \frac{G_o^{t1}(x_o^{t1}, y_o^{t1})}{G_o^{t2}(x_o^{t1}, y_o^{t1})} > 1$$

در این حالت، ممکن است $FS_o < 1$ یا $FS_o > 1$ باشد و می توان نتیجه گیری کرد که DMU_o از قسمتی از PPS که دارای پیشرفت تکنولوژی بوده است، به قسمتی که دارای پسرفت تکنولوژی می باشد، حرکت نموده و تغییر استراتژی DMU_o در استفاده از ورودی های مختلف مفید نبوده است.

با توجه به این که اندیس بهره وری مالمکوئیست را می توان با توجه به کارایی کل شبکه نیز تعریف کرد، لذا مدل های زیر را در نظر می گیریم.

۱. در مدل (۲۰) هم واحد تحت ارزیابی در زمان t_1 و هم مرز کارایی در زمان t_1 در نظر گرفته شده است.

$$\bar{G}_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1}) = \text{Max} \sum_{r=1}^2 u_r d_{ro}^{t_1},$$

s. t.

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{io}^{1t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lo}^{2t_1} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{po}^{3t_1} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_1} + k_1 y_{1j}^{t_1} - \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_1} - u_1 d_{1j}^{t_1} + t_0^1 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_1} - \sum_{r=1}^2 k_r y_{rj}^{t_1} + t_0^2 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (20)$$

$$\sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_1} + k_2 y_{2j}^{t_1} - u_2 d_{2j}^{t_1} + t_0^3 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_1} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_1} - \sum_{r=1}^2 u_r d_{rj}^{t_1} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$k_r \geq 0, \quad v_i^1 \geq 0, \quad v_l^2 \geq 0, \quad v_p^3 \geq 0, \quad w_f \geq 0, \quad u_s \geq 0, \quad \text{for all } r, i, l, p, f, s.$$

$$t_0^1, t_0^2, t_0^3 \text{ Free.}$$

جواب بهین مدل فوق معرف کارایی کل واحد تحت ارزیابی در زمان t_1 است.

۲. در مدل (۲۱) هم واحد تحت ارزیابی در زمان t_2 و هم مرز کارایی در زمان t_2 در نظر گرفته شده است.

$$\bar{G}_o^{t_1}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2}) = \text{Max} \sum_{r=1}^2 u_r d_{ro}^{t_2},$$

s. t.

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{io}^{1t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lo}^{2t_2} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{po}^{3t_2} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_1} + k_1 y_{1j}^{t_1} - \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_1} - u_1 d_{1j}^{t_1} + t_0^1 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_1} - \sum_{r=1}^2 k_r y_{rj}^{t_1} + t_0^2 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (21)$$

$$\sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_1} + k_2 y_{2j}^{t_1} - u_2 d_{2j}^{t_1} + t_0^3 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_1} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_1} - \sum_{r=1}^2 u_r d_{rj}^{t_1} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{io}^{1t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lo}^{2t_2} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{po}^{3t_2} - \sum_{r=1}^2 u_r d_{ro}^{t_2} \geq 0,$$

$$k_r \geq 0, \quad v_i^1 \geq 0, \quad v_l^2 \geq 0, \quad v_p^3 \geq 0, \quad w_f \geq 0, \quad u_s \geq 0, \quad \text{for all } r, i, l, p, f, s.$$

$$t_0^1, t_0^2, t_0^3 \text{ Free.}$$

جواب بهین مدل فوق معرف کارایی کل واحد تحت ارزیابی در زمان t_2 است.

۳. در مدل (۲۲) واحد تحت ارزیابی در زمان t_2 و مرز کارایی در زمان t_1 در نظر گرفته شده است.

$$\bar{G}_o^{t_1}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2}) = \text{Max} \sum_{r=1}^2 u_r d_{ro}^{t_2},$$

s. t.

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{io}^{1t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lo}^{2t_2} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{po}^{3t_2} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_1} + k_1 y_{1j}^{t_1} - \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_1} - u_1 d_{1j}^{t_1} + t_0^1 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_1} - \sum_{r=1}^2 k_r y_{rj}^{t_1} + t_0^2 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (22)$$

$$\sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_1} + k_2 y_{2j}^{t_1} - u_2 d_{2j}^{t_1} + t_0^3 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_1} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_1} - \sum_{r=1}^2 u_r d_{rj}^{t_1} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{io}^{1t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lo}^{2t_2} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{po}^{3t_2} - \sum_{r=1}^2 u_r d_{ro}^{t_2} \geq 0,$$

$$k_r \geq 0, \quad v_l^1 \geq 0, \quad v_l^2 \geq 0, \quad v_p^3 \geq 0, \quad w_f \geq 0, \quad u_s \geq 0, \quad \text{for all } r, i, l, p, f, s.$$

$$t_0^1, t_0^2, t_0^3 \text{ Free.}$$

از آن جا که کارایی کل واحد تحت ارزیابی در زمان t_2 و مرز کارایی در زمان t_1 در نظر گرفته شده لذا مقدار بهین تابع هدف مدل فوق معرف کارایی نمی باشد.

۴. در مدل (۲۳) واحد تحت ارزیابی در زمان t_1 و مرز کارایی در زمان t_2 در نظر گرفته شده است.

$$\bar{G}_o^{t_2}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1}) = \text{Max} \sum_{r=1}^2 u_r d_{ro}^{t_1},$$

s. t.

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{io}^{1t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lo}^{2t_1} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{po}^{3t_1} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_2} + k_1 y_{1j}^{t_2} - \sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_2} - u_1 d_{1j}^{t_2} + t_0^1 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{f=1}^2 w_f z_{fj}^{t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_2} - \sum_{r=1}^2 k_r y_{rj}^{t_2} + t_0^2 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

(۲۳)

$$\sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_2} + k_2 y_{2j}^{t_2} - u_2 d_{2j}^{t_2} + t_0^3 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{ij}^{1t_2} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lj}^{2t_2} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{pj}^{3t_2} - \sum_{r=1}^2 u_r d_{rj}^{t_2} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^3 v_i^1 x_{io}^{1t_1} + \sum_{l=1}^2 v_l^2 x_{lo}^{2t_1} + \sum_{p=1}^3 v_p^3 x_{po}^{3t_1} - \sum_{r=1}^2 u_r d_{ro}^{t_1} \geq 0,$$

$$k_r \geq 0, \quad v_i^1 \geq 0, \quad v_l^2 \geq 0, \quad v_p^3 \geq 0, \quad w_f \geq 0, \quad u_s \geq 0, \quad \text{for all } r, i, l, p, f, s,$$

$$t_0^1, t_0^2, t_0^3 \text{ Free.}$$

از آن جا که کارایی کل واحد تحت ارزیابی در زمان t_1 و مرز کارایی در زمان t_2 در نظر گرفته شده لذا مقدار بهین تابع هدف مدل فوق معرف کارایی نمی باشد.

به این ترتیب اندیس بهره‌وری مالکونیست را با توجه به کارایی کل در یک شبکه به کمک رابطه زیر به دست می آوریم.

$$\bar{M}_o = \frac{\bar{G}_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{\bar{G}_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} \left[\frac{\bar{G}_o^{t_1}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})}{\bar{G}_o^{t_2}(x_o^{t_2}, y_o^{t_2})} \times \frac{\bar{G}_o^{t_1}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})}{\bar{G}_o^{t_2}(x_o^{t_1}, y_o^{t_1})} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

در صورتی که مقدار $\bar{M}_o$ بزرگتر از یک، کوچکتر و مساوی یک باشد، به ترتیب نشان دهنده رشد، کاهش و عدم تغییر بهره‌وری واحد مورد نظر بوده با توجه به در نظر گرفتن کارایی کل می باشد و در صورتی که مقدار TEC بزرگتر از یک، کوچکتر مساوی یک باشد، به ترتیب نشان دهنده رشد، کاهش عدم تغییر کارایی کل فنی واحد مورد نظر می باشد و در صورتی که مقدار FS بزرگتر از یک، کوچکتر و مساوی یک باشد، به ترتیب نشان دهنده پیشرفت تکنولوژی (نزدیک شدن مرز به سمت مرکز و یا بزرگ شدن مجموعه امکان تولید) و عدم تغییر تکنولوژی و یا مرز کارایی در طی زمان می باشد.

حال با توجه به مقادیر مختلف دو جزء FS_o حالت های مختلف ذیل قابل بررسی می باشد:

$$\text{حالت } A: \frac{\bar{G}_o^{t1}(x_o^{t2}, y_o^{t2})}{\bar{G}_o^{t2}(x_o^{t2}, y_o^{t2})} > 1 \text{ و } \frac{\bar{G}_o^{t1}(x_o^{t1}, y_o^{t1})}{\bar{G}_o^{t2}(x_o^{t1}, y_o^{t1})} > 1$$

در این حالت DMU_o در هر دو زمان، در قسمتی از مجموعه امکان تولید قرارداد که پیشرفت تکنولوژی اتفاق افتاده و مرز PPS دارای انتقال مثبت بوده و مقدار $FS_o > 1$ می‌باشد. این حالت، بهترین حالت می‌باشد.

$$\text{حالت } B: \frac{\bar{G}_o^{t1}(x_o^{t2}, y_o^{t2})}{\bar{G}_o^{t2}(x_o^{t2}, y_o^{t2})} < 1 \text{ و } \frac{\bar{G}_o^{t1}(x_o^{t1}, y_o^{t1})}{\bar{G}_o^{t2}(x_o^{t1}, y_o^{t1})} < 1$$

در این حالت DMU_o در هر دو زمان، در قسمتی از مجموعه امکان تولید قرار دارد که پسرفت تکنولوژی اتفاق افتاده و مرز PPS دارای انتقال منفی بوده و مقدار $FS_o < 1$ می‌باشد. این حالت بدترین حالت می‌باشد.

$$\text{حالت } C: \frac{\bar{G}_o^{t1}(x_o^{t2}, y_o^{t2})}{\bar{G}_o^{t2}(x_o^{t2}, y_o^{t2})} > 1 \text{ و } \frac{\bar{G}_o^{t1}(x_o^{t1}, y_o^{t1})}{\bar{G}_o^{t2}(x_o^{t1}, y_o^{t1})} < 1$$

در این حالت، ممکن است $FS_o < 1$ یا $FS_o > 1$ باشد و می‌توان نتیجه‌گیری کرد که DMU_o از قسمتی از PPS که دارای پسرفت تکنولوژی بوده است به قسمتی که دارای پیشرفت تکنولوژی می‌باشد، حرکت نمود و تغییر استراتژی DMU_o در استفاده از ورودی‌های مختلف مفید بوده است. حال اگر مقدار پیشرفت تکنولوژی در زمان t^2 پسرفت حادث شده در زمان t^1 را بتواند جبران نماید $FS_o > 1$ و در غیر این صورت $FS_o < 1$ خواهد بود.

$$\text{حالت } D: \frac{\bar{G}_o^{t1}(x_o^{t2}, y_o^{t2})}{\bar{G}_o^{t2}(x_o^{t2}, y_o^{t2})} < 1 \text{ و } \frac{\bar{G}_o^{t1}(x_o^{t1}, y_o^{t1})}{\bar{G}_o^{t2}(x_o^{t1}, y_o^{t1})} > 1$$

در این حالت، ممکن است $FS_o < 1$ یا $FS_o > 1$ باشد و می‌توان نتیجه‌گیری کرد که DMU_o از قسمتی از PPS که دارای پیشرفت تکنولوژی بوده است، به قسمتی که دارای پسرفت تکنولوژی می‌باشد، حرکت نموده و تغییر استراتژی DMU_o در استفاده از ورودی‌های مختلف مفید نبوده است.

۴- مثال کاربردی در صنعت پتروشیمی

بسیاری از $DMUs$ بیش از یک مرحله دارند. برای ارزیابی عملکرد این نوع از واحدها، به کمک DEA نمی‌توان کل را همانند یک جعبه سیاه در نظر گرفت بلکه می‌بایست به روابط درونی آن نیز توجه نمود. روش‌های مختلفی برای ارزیابی کارایی واحدهای چندمرحله‌ای ارایه شده است.

همان‌طور که در بخش ۳ اشاره شد دوروش متفاوت با توجه به مدل مضربی برای ارزیابی یک زنجیره‌تأمین شامل روابط میانی و برگشت‌پذیر به همراه ورودی و خروجی‌های مستقل سیستم معرفی شد. در یکی از این دوروش بحث ارزیابی کارایی تجمعی زنجیره مد نظر بود و در روش دیگر بحث ارزیابی کارایی کلی سیستم از دو منظر ماهیت ورودی و ماهیت خروجی مد نظر بود. در هر دو حالت به ارزیابی کارایی‌های استیج‌های شبکه نیز پرداختیم. هر کدام از این روش به لحاظ تیوری ویژگی‌های خاص خود را دارا می‌باشند و از هر کدام در محاسبه بهره‌وری به کمک اندیس مالک‌نویست خواهیم پرداخت.

در این فصل به بررسی یک مثال کاربردی در صنعت پتروشیمی می‌پردازیم و هر دو رویکرد معرفی شده را در این مثال کاربردی پیاده‌سازی می‌کنیم و به ارزیابی نتایج به‌دست آمده خواهیم پرداخت. قسمتی از ساختار صنعت پتروشیمی استخراج گردیده است به‌علاوه با توجه به مدل‌های معرفی شده برای ارزیابی کارایی تجمعی و کارایی کل، به بررسی پیشرفت و پسرفت واحدهای تحت ارزیابی با توجه به اندیس بهره‌وری مالک‌نویست با در نظر گرفتن هر دو کارایی تجمعی و کارایی کل، از دو منظر ماهیت ورودی و ماهیت خروجی، نیز خواهیم پرداخت.

لازم به ذکر است از مدل ماهیت ترکیبی DEA استفاده نکردیم زیرا در مثال کاربردی هدف ما مطالعه و ارزیابی نتایج به‌دست آمده از ماهیت ورودی و ماهیت خروجی بوده است. این رویکرد را به‌عنوان پایه‌ای برای مطالعات آتی با توجه به مدل‌های ماهیت ترکیبی DEA نیز می‌توان به محققین برای مطالعات آینده پیشنهاد داد.

۴-۱- اشکال مختلف پیاده‌سازی DMUs

یک DMU نهادی است که داده را به ستاده تبدیل می‌کند. در مدل DEA ، $DMUs$ باید همگن باشند و وظایف و اهداف مشابه داشته باشند. این روش به طور با در نظر گرفتن نسبت ورودی‌های متنوع (یا منابع) به خروجی‌های متنوع تولید شده (یا خدمات) بهره‌وری را اندازه‌گیری می‌کند. بنابراین، متغیرهای مساله را می‌توان در دو دسته کلی داده‌ها و ستاده‌ها تقسیم نمود. تعیین متغیرهای داده و ستاده در به‌کارگیری مدل DEA بسیار اهمیت دارد. زیرا نتایج حاصل از حل مدل DEA مبتنی بر نوع داده و ستاده‌های انتخابی است. به طوری که اگر یک متغیر داده یا ستاده عوض شود، نتایج مدل عوض خواهد شد. در نتیجه اگر متغیرهای داده و ستاده درست تعریف شوند. ارزیابی کارایی $DMUs$ ، واقعی‌تر خواهد بود. استخراج ورودی‌ها و خروجی‌های ارزیابی که از بین مجموعه‌ای از شاخص‌ها انتخاب گردیدند در واقع مهم‌ترین قسمت تحقیق را به خود اختصاص داده است به این نکته مهم باید توجه داشت که اتخاذ هدف‌های مختلف در ارزیابی، به انتخاب شاخص‌های مختلف ورودی و خروجی منجر می‌شود. از طرف دیگر نقش شاخص‌ها هشدار دادن به تصمیم‌گیرندگان در خصوص وجود مشکلات بالقوه یا پنهان در یک سری زمینه‌های خاص و یا ادامه روند مطلوب در زمینه‌های دیگر است.

برای شناسایی شاخص‌ها ابتدا بایستی فرآیند کلی پتروشیمی‌های مختلف مورد بررسی قرار گیرد و در نهایت با هماهنگی کارشناسان مختلف خبره در این حوزه، فرآیند شکل ۱ مورد تایید قرار گیرد (شکل ۱ را در نظر بگیرید).

در شکل ۱ فرآیندها در سه طبقه واحد الفین، واحد تترامر و واحد دو دسیل بنزن مشخص گردید که هر کدام از واحدها دارای وظایف مشخصی هستند که در زیر سعی می‌کنیم اهم وظایف آن‌ها را توضیح دهیم.

برحسب تعریف، پتروشیمی به صنایعی گفته می‌شود که در آن هیدروکربن‌های موجود در نفت خام و یا گاز طبیعی پس از فرآورش در یک سری فرآیندهای شیمیایی به فرآورده‌های جدید شیمیایی تبدیل می‌شوند. تولید محصولات پتروشیمی به گونه‌ای است که در برخی حالات یک واحد اصلی در بالادست ماده اولیه واحدهای دیگر را تولید می‌کند مانند واحد الفین که با تولید اتیلن و پروپیلن نیاز واحدهای پلی‌اتیلن و پلی‌پروپیلن را تامین می‌کند. لذا با توجه به تنوع و تفاوت فرآیندی در مجتمع‌های پتروشیمی بررسی وضعیت انرژی در هر واحد به صورت جداگانه انجام خواهد شد. از طرفی این صنعت همانند صنایع پالایشگاهی به گونه‌ای است که در برخی واحدها نظیر الفین سوخت به عنوان خوراک مصرف می‌گردد. حامل‌های انرژی مصرفی در مجتمع‌های پتروشیمی عمدتاً گاز طبیعی و سوخت‌های فسیلی است.

تولید محصولات پتروشیمی به گونه‌ای است که یک واحد اصلی در بالا دست، ماده اولیه واحدهای دیگر را تولید می‌کند، مانند واحد الفین که با تولید اتیلن و پروپیلن نیاز واحدهای پلی‌اتیلن، تترامر و پروپیل را تامین می‌کند.

پس از بررسی‌های فراوان شاخص‌ها متناسب با ساختار زنجیره کامل گردید و با ریزنی‌های مختلف با تعدادی از پتروشیمی‌هایی که فرآیندهای مشابه دارند در نهایت توانسته‌ایم داده‌های از بیست واحد پتروشیمی داده‌ها را استخراج کنیم در ذیل شاخص‌ها در قالب جدول‌هایی نمایش داده می‌شود:

۴-۲- شاخص بهره‌وری المکونیست

۴-۲-۱- شاخص بهره‌وری المکونیست با مدل کارایی تجمعی در ماهیت خروجی

برای محاسبه شاخص بهره‌وری المکونیست داده‌های پتروشیمی‌های مختلف را در بازه‌های ۱۳۹۵ تا ۱۳۹۸ استخراج گردید و با انجام محاسبات در بازه‌های ۹۵-۹۶، ۹۶-۹۷، ۹۷-۹۸ نمودارهای روند برای واحدهای مختلف ترسیم گردید و تحلیل واحدها بر اساس این نمودارها صورت پذیرفت (جدول ۱ را در نظر بگیرید).

جدول ۱- اندیس بهره‌وری مالکونیست برای کارایی تجمعی در ماهیت خروجی برای ۹۵-۹۶.

Table 1- Malmquist productivity index for cumulative efficiency in the nature of output for 2016-2017.

DMUs	D11	D22	D21	D12	MPI
	$D^t(t)$	$D^{t+1}(t+1)$	$D^{t+1}(t)$	$D^t(t+1)$	شاخص مالکونیست
DMU1	1.26	1.08	1.47	1	1.12
DMU2	1.36	1.01	1.68	1	1.12
DMU3	2.18	1.22	2.25	1.01	1.12
DMU4	1.21	1.75	1.08	1.73	0.95
DMU5	2.57	1.63	2.4	1.33	1.07
DMU6	1.6	1.08	1.75	1.09	1.04
DMU7	1.55	1.36	1.83	1.06	1.23
DMU8	1.67	1.21	1.73	1	1.12
DMU9	1.01	1.46	1.11	1.25	1.13
DMU10	1	1.01	1	1	1
DMU11	1.75	1.42	1.91	1.33	1.08
DMU12	1.54	2.58	1.55	2.32	1.06
DMU13	2.03	1.4	2.17	1.14	1.14
DMU14	1.39	1.13	1.59	1	1.13
DMU15	1.01	2.01	1	1.04	1.38
DMU16	1.07	1.01	1.26	1	1.09
DMU17	1.02	1.33	1.07	1.22	1.07
DMU18	1.51	1	1.7	1	1.06
DMU19	1.01	2.52	1.14	2.3	1.11
DMU20	1.01	1.07	1	1	1.03

با توجه به نمودارهای بالا متوجه می‌شویم که فقط پتروشیمی چهار داری پسرقت بوده و بقیه واحدها داری پسرقت می‌باشند واحد ۱۵ دارای بیشترین پسرقت بوده و تعدادی از واحدها میزان پسرقت آن‌ها بسیار ناچیز بوده است (شکل ۲ را در نظر بگیرید).

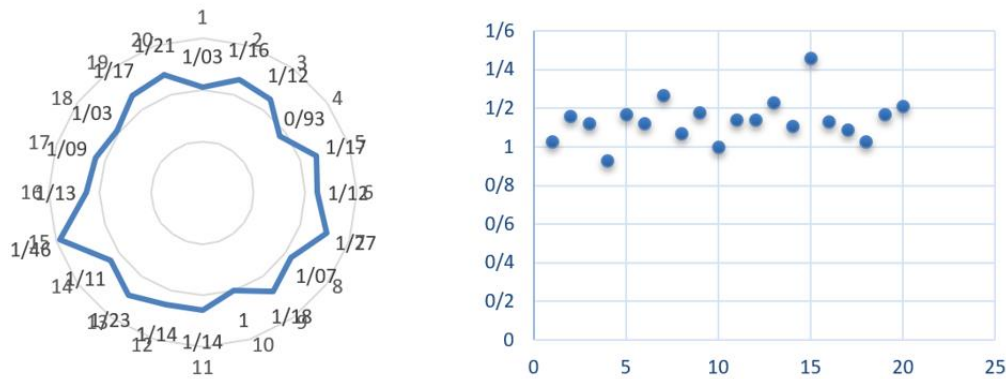
در ادامه با داشتن داده‌های سال‌های بین ۹۶ و ۹۷ شاخص‌ها را متناسب با دوره قبل محاسبه گردید (جدول ۲ را در نظر بگیرید).

جدول ۲- اندیس بهره‌وری مالکونیست برای کارایی تجمعی در ماهیت خروجی برای ۹۶-۹۷.

Table 2- Malmquist productivity index for cumulative efficiency in the nature of output for 2017-2018.

DMUs	D11	D22	D21	D12	MPI
	$D^t(t)$	$D^{t+1}(t+1)$	$D^{t+1}(t)$	$D^t(t+1)$	شاخص مالکونیست
DMU1	1.25	1.12	1.34	1	1.03
DMU2	1.26	1.01	1.38	1.12	1.16
DMU3	2.48	1.12	2.12	1.12	1.12
DMU4	1.31	1.44	1.43	1.53	0.93
DMU5	2.57	1.54	1.75	1.23	1.17
DMU6	1.43	1.08	1.45	1.16	1.12
DMU7	1.29	1.21	1.73	1.06	1.27
DMU8	1.76	1.12	1.45	1	1.07
DMU9	1.11	1.33	1.13	1.12	1.18
DMU10	1	1.01	1	1	1
DMU11	1.45	1.42	1.62	1.25	1.14
DMU12	1.43	1.68	1.59	2.74	1.14
DMU13	1.76	1.34	2.27	1.23	1.23
DMU14	1.39	1.13	1.387	1.43	1.11
DMU15	1	1.56	1	1.04	1.46
DMU16	1.23	1.23	1.76	1	1.13
DMU17	1.07	1.23	1.07	1.05	1.09
DMU18	1.54	1	1.23	1	1.03
DMU19	1.9	1.65	1.45	1.14	1.17
DMU20	1.11	1.18	1	1	1.21

مشابه قبل واحد ۱۵ دارای شرایط پسرقتی به مراتب بیشتر از بقیه واحدها می‌باشد در نمودارهای ذیل شرایط واحدها به صورت گرافیکی نمایش داده شده است، شکل ۳، تنها واحدی که داری پسرقت بوده واحد شماره چهار می‌باشد.



شکل ۳- نمودارهای شاخص بهره‌وری مالمکوئیست برای سال‌های ۹۶-۹۷.
Figure 3- Malmqvist productivity index graphs for 2017-2018.

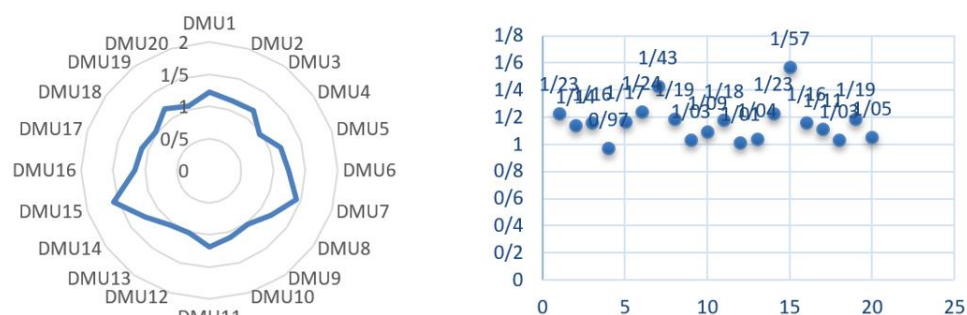
مشابه بحث‌های قبلی برای سال‌های ۹۷-۹۸ نیز محاسبات انجام پذیرفته. جدول ۳ را در نظر بگیرید.

جدول ۳- اندیس بهره‌وری مالمکوئیست برای کارایی تجمعی در ماهیت خروجی برای ۹۷-۹۸.

Table 3- Malmqvist productivity index for cumulative efficiency in the nature of output for 2018-2019.

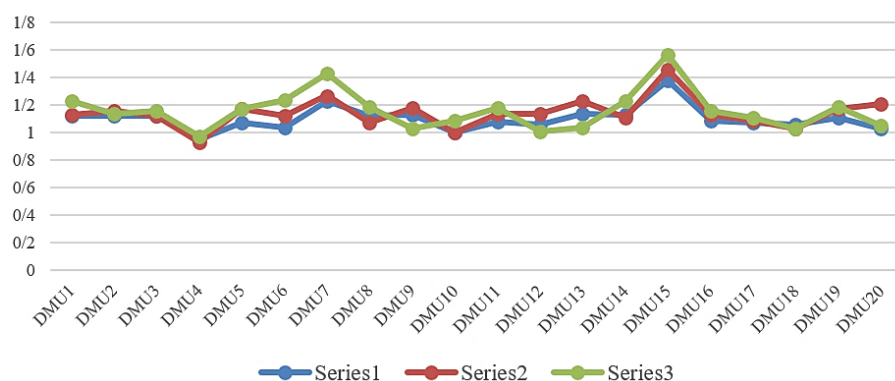
DMUs	D11	D22	D21	D12	MPI
	$D^t(t)$	$D^{t+1}(t+1)$	$D^{t+1}(t)$	$D^t(t+1)$	شاخص مالمکوئیست
DMU1	1.36	1.12	1.32	1	1.23
DMU2	1.36	1.04	1.54	1	1.14
DMU3	1.68	1.12	1.65	1.01	1.16
DMU4	1.11	1.45	1.12	1.32	0.97
DMU5	1.87	1.53	2.12	1.24	1.17
DMU6	1.54	1.18	1.34	1.09	1.24
DMU7	1.45	1.26	1.56	1.06	1.43
DMU8	1.57	1.11	1.54	1	1.19
DMU9	1.13	1.35	1.11	1.12	1.03
DMU10	1.03	1.01	1	1	1.09
DMU11	1.45	1.32	1.61	1.23	1.18
DMU12	1.86	2.43	1.54	76	1.01
DMU13	1.78	1.33	1.32	1.14	1.04
DMU14	1.23	1.21	1.22	1	1.23
DMU15	1.12	1.65	1	1.04	1.57
DMU16	1	1.01	1.15	1	1.16
DMU17	1.12	1.18	1.07	1.12	1.11
DMU18	1.31	1	1.37	1	1.03
DMU19	1.08	2.09	1.09	1.76	1.19
DMU20	1.06	1.12	1	1	1.05

مشابه قبل واحد ۱۵ دارای شرایط پیشرفتی به مراتب بیشتر از بقیه واحدها می‌باشد در نمودارهای ذیل شرایط واحدها به صورت گرافیکی نمایش داده شده است تنها واحدی که دارای پسرفت بوده واحد شماره چهارمی باشد. شکل ۵ را در نظر بگیرید.



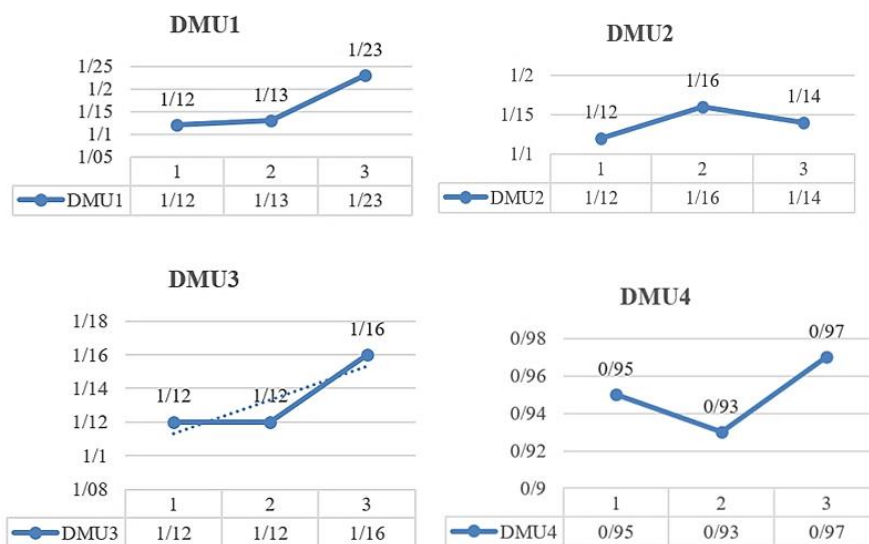
شکل ۴- نمودارهای شاخص بهره‌وری مالمکوئیست برای سال‌های ۹۷-۹۸.
Figure 4- Malmqvist Productivity Index graphs for 2018-2019.

در صورتی که بخواهیم تغییرات شاخص مالمکوئیست تمام واحدها را در یک نمودار نمایش دهیم در این صورت شکل ۵ نشان‌دهنده این تغییرات خواهد بود (شکل ۵ را در نظر بگیرید).



شکل ۵- نمودارهای شاخص بهره‌وری مالمکوئیست برای سال‌های ۹۶-۹۸.
Figure 5- Malmqvist Productivity Index graphs for 2017-2019.

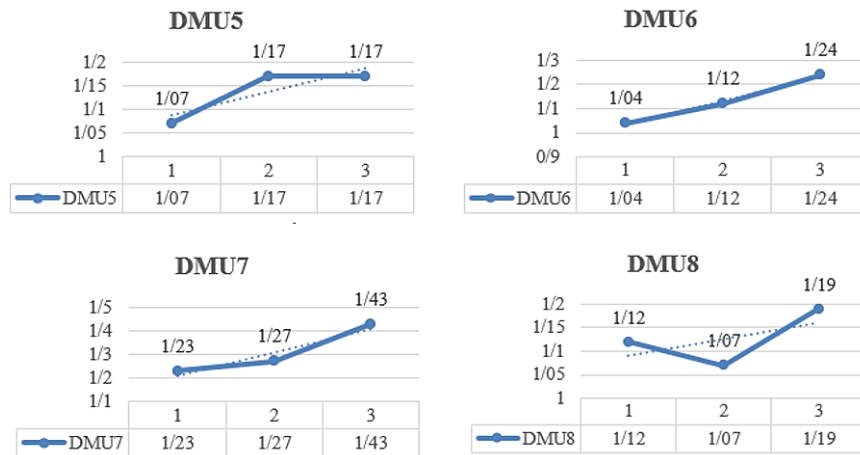
در صورتی که بخواهیم تجزیه و تحلیل شاخص مالمکوئیست را به صورت جداگانه برای هر واحد پتروشیمی داشته باشیم بایستی نمودارهای تنهای آن‌ها را بر اساس همین شاخص رسم نماییم نمودارهای زیر نشان‌دهنده میزان تغییرات این شاخص‌ها می‌باشند.



شکل ۶- نمودارهای شاخص بهره‌وری مالمکوئیست برای سال‌های ۹۶-۹۸ برای واحدهای یک تا چهار.
Figure 6- Malmqvist productivity index graphs for 2017-2019 for units one to four.

همان‌طور که از شکل ۶ مشخص است واحد تحت ارزیابی اول طی این سال‌ها با پیشرفت مواجه بوده است ولیکن در واحد شماره دوم طی سال‌های ۹۵-۹۶ و همچنین ۹۶-۹۷ و ۹۷-۹۸ پیشرفت داشته است ولیکن میزان پیشرفت آن در سال ۹۷-۹۸ نسبت دوره ماقبل کمی کمتر بوده است.

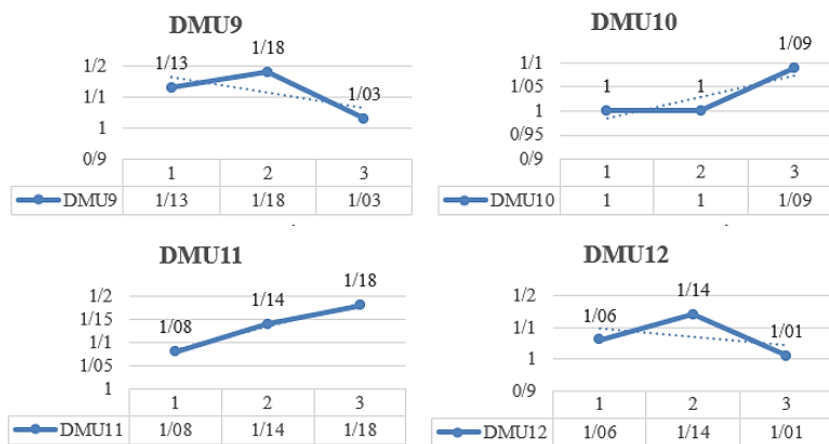
واحد شماره سوم نیز طی تمامی سال‌ها دارای رشد و پیشرفت بوده است ولیکن واحد شماره چهار با داشتن میزان مالمکوئیست کمتر از یک دارای پسرفت بوده است. شکل ۷ را در نظر بگیرید.



شکل ۷- نمودارهای شاخص بهره‌وری مالمکوئست برای سال‌های ۹۶-۹۸ برای واحدهای پنج تا هشت.

Figure 7- Malmqvist productivity index graphs for the years 2017-2019 for units five to eight.

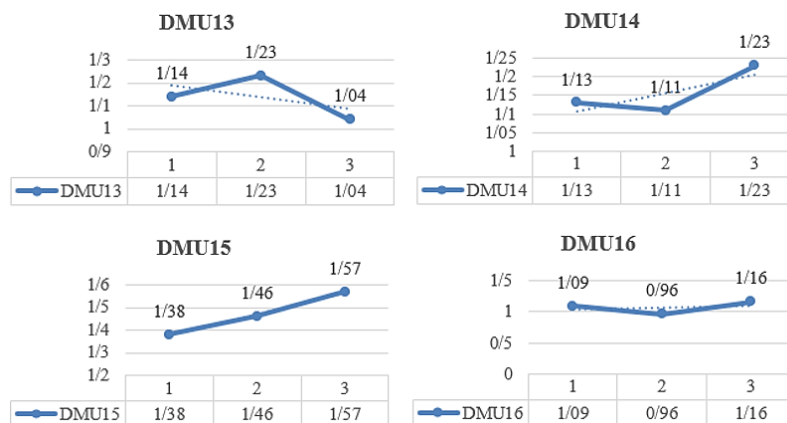
پیشرفت در واحدهای پنجم، ششم و هفتم کاملاً مشهود است ولیکن در واحد شماره هشتم با وجود مقادیر بالای یک شاخص مالمکوئست ولیکن دارای کمی افت طی سال‌های ۹۶-۹۷ نسبت به دوره ماقبل آن می‌باشد. شکل ۸ را در نظر بگیرید.



شکل ۸- نمودارهای شاخص بهره‌وری مالمکوئست برای سال‌های ۹۶-۹۸ برای واحدهای نه تا دوازده.

Figure 8- Malmqvist productivity index graphs for 2017-2019 for units nine to twelve.

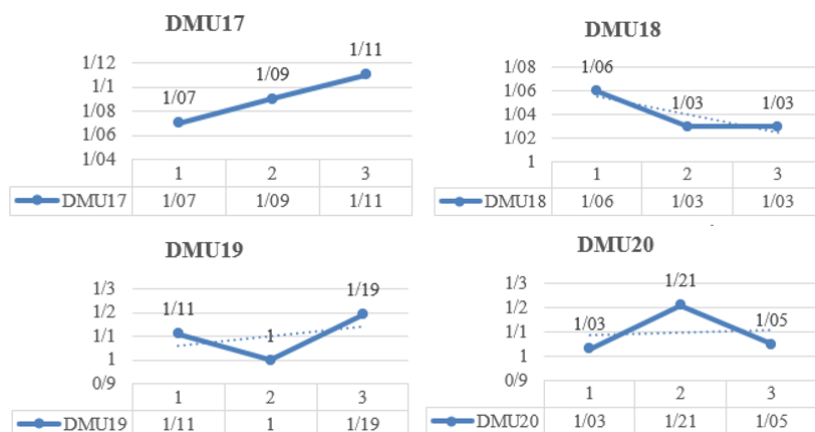
روند پیشرفت در واحد شماره ۱۱ کاملاً مشهود هست و هر دوره نسبت به دوره ماقبلش پیشرفت داشته ولیکن در واحدهای دیگر با وجود بزرگتر از یک بودن و دارای رشد بودن ولیکن روند آن دارای شیب مثبت نمی‌باشد. شکل ۹ را در نظر بگیرید.



شکل ۹- نمودارهای شاخص بهره‌وری مالمکوئست برای سال‌های ۹۶-۹۸ برای واحدهای سیزده تا شانزده.

Figure 9- Malmqvist productivity index graphs for the years 2017-2019 for units thirteen to sixteen.

شرایط واحد پتروشیمی پانزدهم همان‌طور که مشهود می‌باشد بسیار بهتر از واحدهای دیگر می‌باشد، شکل ۱۰ را در نظر بگیرید.



شکل ۱۰- نمودارهای شاخص بهره‌وری مالکونیست برای سال‌های ۹۶-۹۸ برای واحدهای هفده تا بیست.

Figure 10- Malmqvist productivity index graphs for the years 2017-2019 for units seventeen to twenty.

در واحدهای هفدهم تا بیستم نیز شرایط برای تمامی این واحدها نشان‌دهنده پیشرفت می‌باشد ولیکن نمودار روند آن‌ها با تغییرات زیادی همراه می‌باشد

۴-۲-۲- شاخص بهره‌وری مالکونیست با مدل کارایی تجمعی در ماهیت ورودی

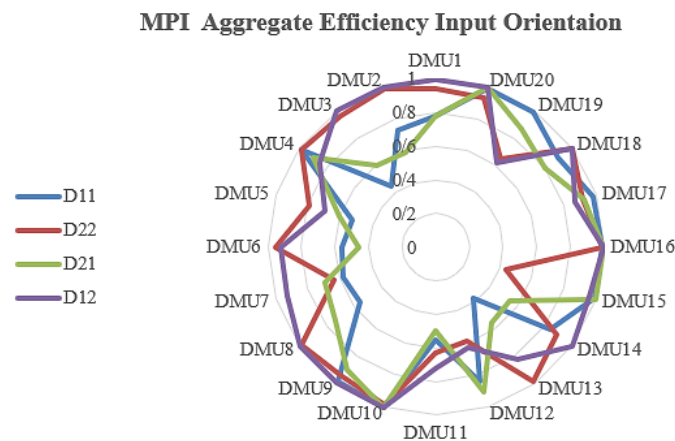
مشابه قسمت قبل محاسبه شاخص بهره‌وری مالکونیست داده‌های پتروشیمی‌های مختلف در بازه‌های ۱۳۹۵ تا ۱۳۹۸ با توجه به مدل ارزیابی کارایی تجمعی در ماهیت ورودی قابل استخراج می‌باشد ولیکن در ذیل صرفاً در بازه ۹۵-۹۶ محاسبات صورت پذیرفته است. جدول ۴ را در نظر بگیرید.

جدول ۴- اندیس بهره‌وری مالکونیست برای کارایی تجمعی در ماهیت ورودی.

Table 4- Malmqvist productivity index for cumulative efficiency in the nature of input.

DMUs	t11	t22	t21	t12	MPI
	$D^t(t)$	$D^{t+1}(t+1)$	$D^{t+1}(t)$	$D^t(t+1)$	شاخص مالکونیست
DMU1	0.78	0.94	0.78	1	0.97
DMU2	0.73	0.99	0.59	1	0.9
DMU3	0.45	0.96	0.6	1	0.74
DMU4	0.99	0.99	0.9	0.85	1.03
DMU5	0.52	0.79	0.6	0.69	1.15
DMU6	0.56	0.95	0.46	0.92	0.92
DMU7	0.58	0.64	0.69	0.93	0.9
DMU8	0.56	0.99	0.74	1	1.14
DMU9	0.99	0.95	0.9	1	0.93
DMU10	1	0.99	1	1	1
DMU11	0.55	0.63	0.5	0.72	0.89
DMU12	0.84	0.59	0.91	0.63	1.01
DMU13	0.38	0.99	0.56	0.83	1.33
DMU14	0.84	0.89	0.54	1	0.75
DMU15	0.99	0.44	1	0.96	0.69
DMU16	0.99	0.99	1	1	1
DMU17	0.98	0.92	0.93	0.87	1
DMU18	0.9	1	0.8	1	0.94
DMU19	0.99	0.65	0.87	0.62	0.97
DMU20	0.99	0.93	1	1	0.97

با توجه به نمودارهای زیر متوجه می شویم که پتروشیمی چهار، پنج، هشت و دوازده داری پیشرفت می باشند و بقیه واحدها داری پسرفت می باشند. شکل ۱۱ را در نظر بگیرید.



شکل ۱۱- مولفه های اندیس مالمکوئیست.

Figure 11- Components of the Malmquist Index.

۳-۲-۴- شاخص بهره‌وری مالمکوئیست با مدل کارایی کل در ماهیت خروجی

مشابه قسمت قبل محاسبه شاخص بهره‌وری مالمکوئیست داده‌های پتروشیمی‌های مختلف در بازه‌های ۱۳۹۵ تا ۱۳۹۸ با توجه به مدل ارزیابی کارایی کل در ماهیت خروجی قابل استخراج می‌باشد ولیکن در ذیل صرفاً در بازه ۹۵-۹۶ محاسبات صورت پذیرفته است. جدول ۵ را در نظر بگیرید.

جدول ۵- اندیس بهره‌وری مالمکوئیست برای کارایی کل در ماهیت خروجی.

Table 5- Malmquist productivity index for total efficiency in the nature of output.

DMUs	t11	t22	t21	t12	MPI
DMU1	1.26	1.08	1.47	1	1.12
DMU2	1.36	1.01	1.68	1	1.11
DMU3	2.18	1.22	2.25	1.01	1.12
DMU4	1.21	1.75	1.08	1.73	0.95
DMU5	2.57	1.63	2.4	1.33	1.07
DMU6	1.6	1.08	1.75	1.09	1.04
DMU7	1.55	1.36	1.83	1.06	1.23
DMU8	1.67	1.21	1.73	1	1.12
DMU9	1.01	1.46	1.11	1.25	1.13
DMU10	1	1.01	1	1	1
DMU11	1.75	1.42	1.91	1.33	1.08
DMU12	1.54	2.58	1.55	2.32	1.06
DMU13	2.03	1.4	2.17	1.14	1.14
DMU14	1.39	1.13	1.59	1	1.13
DMU15	1.01	2.01	1	1.04	1.38
DMU16	1.07	1.01	1.26	1	1.09
DMU17	1.02	1.33	1.07	1.22	1.07
DMU18	1.51	1	1.7	1	1.06
DMU19	1.01	2.52	1.14	2.3	1.11
DMU20	1.01	1.07	1	1	1.03

گراف زیر را در نظر بگیرید. این گراف در یک نگاه به‌طور کلی نشان‌دهنده تغییرات مقدار کارایی و تغییرات مرز کارایی است. شکل ۱۲ را در نظر بگیرید.

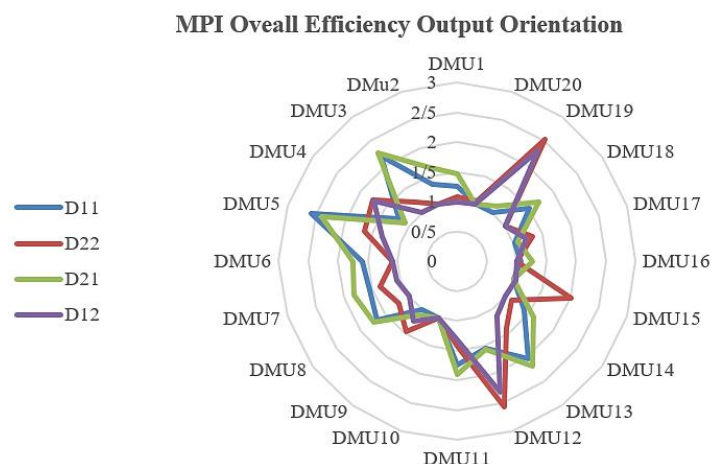


Figure 12- Components of the Malmquist Index.

۴-۲-۴- شاخص بهره‌وری مالمکوئیست با مدل کارایی کل در ماهیت ورودی

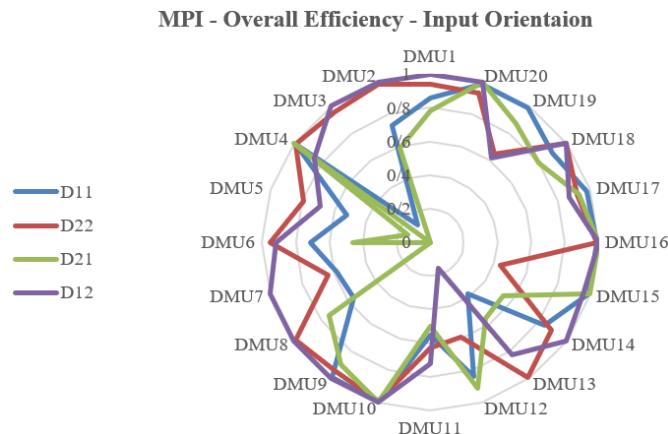
مشابه قسمت قبل محاسبه شاخص بهره‌وری مالمکوئیست داده‌های پتروشیمی‌های مختلف در بازه‌های ۱۳۹۵ تا ۱۳۹۸ با توجه به مدل ارزیابی کارایی کل در ماهیت ورودی قابل استخراج می‌باشد ولیکن در ذیل صرفاً در بازه ۹۵-۹۶ محاسبات صورت پذیرفته است. جدول ۶ را در نظر بگیرید.

جدول ۶- اندیس بهره‌وری مالمکوئیست برای کارایی کل در ماهیت ورودی.

Table 6- Malmquist productivity index for total efficiency in the nature of input.

DMUs	t11	t22	t21	t12	MPI
DMU1	0.86	0.94	0.78	1	0.92
DMU2	0.73	0.99	0.59	1	0.9
DMU3	0.13	0.96	0	1	0.16
DMU4	0.99	0.99	1	0.85	1.09
DMU5	0.52	0.79	0.14	0.69	0.55
DMU6	0.71	0.95	0.46	0.92	0.82
DMU7	0.58	0.64	0	1	0.06
DMU8	0.56	0.99	0.74	1	1.14
DMU9	0.99	0.95	0.9	1	0.93
DMU10	1	0.99	1	1	1
DMU11	0.55	0.63	0.5	0.72	0.89
DMU12	0.84	0.59	0.91	0.16	1.99
DMU13	0.38	0.99	0.56	0.83	1.33
DMU14	0.84	0.89	0.54	1	0.75
DMU15	0.99	0.44	1	0.96	0.68
DMU16	0.99	0.99	1	1	1
DMU17	0.98	0.92	0.93	0.87	1
DMU18	0.9	1	0.8	1	0.94
DMU19	0.99	0.65	0.87	0.62	0.97
DMU20	0.99	0.93	1	1	0.97

گراف زیر را در نظر بگیرید. این گراف در یک نگاه به طور کلی نشان دهنده تغییرات مقدار کارایی و تغییرات مرز کارایی است. شکل ۱۳ را در نظر بگیرید.



شکل ۱۳- مولفه های اندیس المکوئیست.

Figure 13- Components of the Malmquist Index.

۵- نتیجه گیری

از ویژگی های مهم این تحقیق، ارایه مدل ارزیابی عملکرد زنجیره تامین پتروشیمی و همچنین اندازه گیری شاخص المکوئیست مبتنی بر شبکه برای اندازه گیری بهره وری است و سعی شده است یک مدل شبکه ای، مدلی ریاضی برای اندازه گیری عملکرد سازمان فرموله شود، به طوری که بتوانیم بهره وری را به کمک کارایی تجمعی و کارایی کل محاسبه نماییم. در نهایت سنجش بهره وری از پتروشیمی های کشور که اطلاعات آن ها در سه طبقه مدل سازی شده است انجام می پذیرد و نتایج ارزیابی بهره وری پیشرفت و پسرفت *DMUs* که همان زنجیره تامین های پتروشیمی می باشند محاسبه شده و اطلاعات برای تصمیم گیری به مدیران سازمان ارایه خواهد شد.

مدل سازی ریاضی بر مبنای تکنیک *DEA* با توجه به مدل زنجیره تامین معرفی شده در صنعت پتروشیمی فرموله شده و ارزیابی بر مبنای سنجش کارایی کل و کارایی تجمعی در ماهیت ورودی و خروجی انجام شده است. محدودیت های بسیاری در حین جمع آوری داده ها و اطلاعات و همچنین تعریف شاخص های مدل و در نهایت انجام این تحقیق وجود داشت. محدودیت ناشی از عدم دسترسی به اطلاعات واحدهای پتروشیمی جهت ارزیابی عملکرد و رتبه بندی واحدهای یکی از محدودیت ها در این پژوهش می باشد. همچنین به دلیل محرمانه بودن اطلاعات و محدودیت های ایجاد شده در جمع آوری آن، از ذکر اسامی واحدها جلوگیری شده است. لازم به ذکر است که یافته های تحقیق تنها محدود به مدت زمان جمع آوری داده ها است و اعتبار آن دائمی نمی باشد. گذشت زمان ممکن است بر رتبه بندی واحدهای پتروشیمی تاثیر بگذارد که موجب تغییر نتایج می شود. همچنین واحدهای پتروشیمی مورد مطالعه در این پژوهش تعدادی از واحدهای پتروشیمی موجود در کشور انتخاب گردیده است و نتایج حاصل از این تحقیق منحصر به جامعه ی مطالعاتی بوده و با تغییر مکان پژوهش نتایج متفاوتی به دست می آید. بنابراین، تعمیم یافته ها به سایر واحدها امکان پذیر نیست.

مدل سازی و نتایج به دست آمده از این مطالعه نشان دهنده این موضوع است که در کشور ما تا کنون به بررسی وضعیت کارایی پتروشیمی ها از حیث عملکرد فرآیندهای تولید آن پرداخته نشده بود در این تحقیق مدیران ارشد سازمان و وزارت نفت به سادگی می توانند عارضه یابی واحدها و حتی فرآیندها را انجام دهند. همچنین متدولوژی استفاده شده در این تحقیق می تواند همه پالایشگاه های نفت و گاز و همچنین مناطق انتقال گاز و... نیز مورد استفاده قرار بگیرد که تا کنون مورد استفاده قرار نگرفته است. باید توجه داشت که شناسایی نقاط ضعف و مشکلات تولید در فرآیندهای سه گانه پتروشیمی به منظور کمک به حل مشکلات آن ها و همچنین حمایت و تشویق واحدهایی که شرایط بهتری را دارا می باشند. با توجه به مطالعه انجام شده می توان پیشنهاد داد این متدولوژی را در دیگر سازمان های وزارت نفت همانند پالایشگاه ها، مناطق انتقال گاز، پالایشگاه های گاز و... پیاده سازی شود. همچنین می توانیم ارزیابی زنجیره تامین واحدهای پتروشیمی را نیز انجام دهیم یا ارزیابی زنجیره تامین متناسب با استراتژی این سازمان ها صورت پذیرد به این صورت که ابتدا نقشه استراتژی واحدهای پتروشیمی تدوین گردد و در نهایت حسب نقشه ساختار شبکه ای رسم و سپس مورد ارزیابی قرار بگیرند. البته در نظر گرفتن داده ای نادقیق در مدل سازی ریاضی نیز می تواند در مطالعات آتی در نظر گرفته شود.

منابع

- [1] Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*, 2(6), 429–444. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(78\)90138-8](https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8)
- [2] Li, Y., Chen, Y., Liang, L., & Xie, J. (2012). DEA models for extended two-stage network structures. *Omega*, 40(5), 611–618. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2011.11.007>
- [3] Färe, R. (1991). Measuring Farrell efficiency for a firm with intermediate inputs. *Academia economic papers*, 19(2), 329–340.
- [4] Färe, R., & Grosskopf, S. (1997). Intertemporal production frontiers: With dynamic DEA. *Journal of the operational research society*, 48(6), 656. <https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2600779>
- [5] Färe, R., & Grosskopf, S. (1996). Productivity and intermediate products: A frontier approach. *Economics letters*, 50(1), 65–70. [https://doi.org/10.1016/0165-1765\(95\)00729-6](https://doi.org/10.1016/0165-1765(95)00729-6)
- [6] Färe, R., & Grosskopf, S. (2000). Network DEA. *Socio-economic planning sciences*, 34(1), 35–49. [https://doi.org/10.1016/S0038-0121\(99\)00012-9](https://doi.org/10.1016/S0038-0121(99)00012-9)
- [7] Kao, C., & Hwang, S. N. (2008). Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan. *European journal of operational research*, 185(1), 418–429. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.11.041>
- [8] Malmquist, S. (1953). Index numbers and indifference surfaces. *Trabajos de estadística*, 4(2), 209–242. <https://doi.org/10.1007/BF03006863>
- [9] Caves, D. W., Christensen, L. R., & Diewert, W. E. (1982). The economic theory of index numbers and the measurement of input, output, and productivity. *Econometrica*, 50(6), 1393–1414. <https://doi.org/10.2307/1913388>
- [10] Färe, R., Grosskopf, S., Lindgren, B., & Roos, P. (1994). Productivity developments in swedish hospitals: A malmquist output index approach. In *Data envelopment analysis: Theory, methodology, and applications* (pp. 253–272). Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-011-0637-5_13
- [11] Farrell, M. J. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the royal statistical society series a: Statistics in society*, 120(3), 253–281. <https://doi.org/10.2307/2343100>