



Paper Type: Original Article



General DEA Model and Game Theory with Convex Cone Constraints for Interval Data

Javad Gerami^{1,*} , Peiman Ghasemi² ¹ Department of Mathematics, Shiraz branch, Islamic Azad University, Shiraz, Iran; javadgerami2002@yahoo.com.² Department of Industrial Engineering, South-Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran;
st_p_ghasemi@azad.ac.ir.

Citation:

Gerami, J., & Ghasemi, P. (2024). General DEA model and Game Theory with convex cone constraints for interval data. *Management: Modeling, analysis and applications*, 1(3), 177-186.

Received: 23/12/2023

Reviewed: 28/03/2024

Revised: 09/05/2024

Accepted: 16/06/2024

Abstract

Purpose: This study aims to develop the link between Data Envelopment Analysis (DEA) and Game Theory and to present a general model for two-player zero-sum games under convex cone constraints in the case of interval data.

Methodology: In this study, a model for two-player linear zero-sum games in finite space is developed, whose constraints are considered compact convex cones. Then, assuming that the data are interval, it is shown that solving the model is equivalent to solving a convex programming problem in the framework of Game Theory. For a more detailed analysis, weighted constraints are used, and the approach to solving the model is explained with a numerical example.

Findings: The results obtained show that by applying conical constraints and interval data, the DEA model can be rewritten in the form of a linear game. This correspondence facilitates the solution of the problem and the interpretation of its results from the perspective of Game Theory.

Originality/Value: The main innovation of the paper is the presentation of a combined and conceptual model through which the connection between DEA and Game Theory is established in the presence of interval data and convex constraints. This model allows for a more accurate analysis of multi-criteria decision-making problems and has the potential to be developed in different areas of operations research.

Keywords: Data envelopment analysis, Game Theory, Compact convex cone, Linear programming of interval data, Weight constraints.



Corresponding Author: javadgerami2002@yahoo.com

<https://doi.org/10.22105/mmaa.v1i3.85>

Licensee. **Management: Modeling, Analysis and Application**. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



مدل کلی DEA و نظریه بازی ها با قیود مخروط محدب برای داده های بازه ای

جواد گرامی^۱، پیمان قاسمی^۲

^۱گروه ریاضی، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران.

^۲گروه مهندسی صنایع، واحد تهران-جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

چکیده

هدف: این پژوهش با هدف گسترش پیوند میان تحلیل پوششی داده ها^۱ و نظریه بازی ها، به ارائه یک مدل کلی برای بازی های دو نفره با مجموع صفر تحت قیود مخروط محدب در شرایط داده های بازه ای می پردازد.

روش شناسی پژوهش: در این مطالعه، مدلی برای بازی های خطی دو نفره با مجموع صفر در فضای متناهی توسعه داده شده است که قیود آن به صورت مخروط محدب فشرده در نظر گرفته می شود. سپس با فرض بازه ای بودن داده ها، نشان داده می شود که حل مدل معادل حل یک مساله برنامه ریزی محدب در چارچوب نظریه بازی ها است. برای تحلیل دقیق تر، از محدودیت های وزنی استفاده شده و رویکرد حل مدل با یک مثال عددی تشریح شده است.

یافته ها: نتایج به دست آمده نشان می دهد که با اعمال قیود مخروطی و داده های بازه ای، می توان مدل DEA را در قالب یک بازی خطی بازنویسی کرد. این تناظر باعث تسهیل در حل مساله و تفسیر نتایج آن از منظر تئوری بازی ها می شود.

اصالت/ارزش افزوده علمی: نوآوری اصلی مقاله، ارائه مدلی ترکیبی و مفهومی است که از طریق آن ارتباط میان DEA و نظریه بازی ها در حضور داده های بازه ای و قیود محدب برقرار می گردد. این مدل امکان تحلیل دقیق تری از مسایل تصمیم گیری چندمعیاره را فراهم می آورد و قابلیت توسعه در حوزه های مختلف تحقیق در عملیات را دارد.

کلیدواژه ها: تحلیل پوششی داده ها، نظریه بازی ها مخروط فشرده محدب، برنامه ریزی خطی داده های بازه ای، محدودیت های وزنی.

۱- مقدمه

در چند سال اخیر DEA به یکی از پربارترین و پرفعالیت ترین شاخه ها در زمینه تحقیق در عملیات تبدیل شده است. شاید این به خاطر رشد رقابت در بازار جهانی باشد. تحلیل کارایی و رقابت نسبت به قبل اهمیت بیشتری پیدا کرده [1]. اولین بار رابطه بین DEA و نظریه بازی ها توسط بنکر [2] بیان شد. برای حالت چند ورودی و چند خروجی، هائو و همکاران [3] یک مدل بازی که با مدل های دیگر DEA ارتباط داشت ارائه دادند. تناظر قوی بین این مقوله باعث بهبود رفتار سازمان های اقتصادی و نظامی شد. در کشور ما برای اولین بار جهان شاهلو و همکاران [4] مقالات متعددی در این زمینه ارائه دادند.

¹ Data Envelopment Analysis (DEA)

در این مقاله ابتدا مروری بر نظریه بازی ها خواهیم داشت و سپس در بخش سوم یک مدل DEA ارایه داده و رابطه آن را با بازی دونفره با مجموع صفر با قیود مخروط محدب بیان کرده، در انتها مساله فوق را در حالتی که داده ها به صورت بازه ای باشند، بررسی می کنیم و مثال عددی ارایه می دهیم.

۲- نظریه بازی ها

در این مقاله بازی دونفره با مجموع صفر با قیود مخروط محدب بسته را برای استراتژی مختلط بررسی می کنیم [5]، [6]. همان طور که می دانیم استراتژی بهینه برای چنین بازی ای از حل دو مساله برنامه ریزی خطی به دست می آید. فرض کنید بازیکن I ، دارای m استراتژی و بازیکن II ، دارای n استراتژی باشد. به طوری که مجموعه استراتژی آن ها به صورت $S_I = \{1, \dots, m\}$ و $S_2 = \{1, \dots, n\}$ و توابع پرداخت^۱ به صورت

$$f_1(i, j) = a_{ij}, f_2(i, j) = -a_{ij}$$

باشد. $A = (a_{ij})_{m \times n}$ را ماتریس پرداخت در نظر می گیریم و مجموعه استراتژی مختلط را به صورت زیر نظر

$$i \in S_I, j \in S_2$$

می گیریم:

$$\hat{S}_1 = \{p = (p_1, \dots, p_m) | e^T p = 1, p \in V\}, \hat{S}_2 = \{q = (q_1, \dots, q_n) | \tilde{e}^T q = 1, q \in K\}.$$

به طوری که $K \in E_+^n = \{q | q \in R_+^n\}$ و $V \in E_+^m = \{p | p \in R_+^m\}$ هستند
 $\tilde{e} = (1, \dots, 1) \in R^n, e = (1, \dots, 1) \in R^m, \text{Int} K \neq \emptyset, \text{Int} V \neq \emptyset$

در این مقاله بازی دونفره با مجموع صفر با $G(A, V, K)$ نشان می دهیم. تعاریف و قضایای زیر را داریم.

تعریف ۱- فرض $\hat{p} \in \hat{S}_1, \hat{q} \in \hat{S}_2$ و اگر برای هر $p \in \hat{S}_1, q \in \hat{S}_2$

$$E(p, \hat{q}) \leq E(\hat{p}, \hat{q}) \leq E(\hat{p}, q).$$

آن گاه $(\hat{p}, \hat{q})$ استراتژی بهینه برای بازی $G(A, V, K)$ و $\hat{V} = (\hat{p}, \hat{q})$ مقدار $G(A, V, K)$ خواهد بود.

تعریف ۲- مخروط های قطبی K, V را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$V^* = \{x | p^T x \leq 0, \text{ for all } p \in V\}, K^* = \{z | q^T z \leq 0, \text{ for all } q \in K\}.$$

قضیه ۱- اگر مساله های پرایمال و دوآل را به صورت زیر تعریف کنیم و $(\hat{q}, \hat{\alpha})$ و $(\hat{p}, \hat{\beta})$ جواب های بهینه مساله های پرایمال و دوآل زیر باشند آن گاه $(\hat{q}, \hat{\alpha})$ استراتژی بهینه از $G(A, V, K)$ با مقدار $\hat{v} = \hat{\alpha} = \hat{\beta}$ خواهد بود.

$$\hat{\alpha} = \text{Min } \alpha,$$

s.t.

$$Aq - \alpha e \in V^*,$$

$$\tilde{e}^T q = 1,$$

$$q \in K.$$

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \text{Max } \beta, \\ \text{s.t.} \\ (-p^T A + \beta \tilde{e}^T)^T &\in K^*, \\ e^T p &= 1, \\ p &\in V. \end{aligned}$$

۳- مدل کلی DEA و رابطه آن با بازی دو نفره با مجموع صفر تعریف

تعریف ۳- فرض کنید $X = (x_1, \dots, x_n)$ یک ماتریس $m \times n$ و $x_j \geq 0$ و $j = 1, 2, \dots, n$ بردار ورودی‌ها باشد و $Y = (y_1, \dots, y_n)$ که یک ماتریس $s \times n$ و $y_j \geq 0$ و $j = 1, \dots, n$ بردار خروجی‌ها باشد و $U \subseteq R_+^s, V \subseteq R_+^m, \text{Int}U \neq \emptyset, \text{Int}V \neq \emptyset$.

اکنون مدل کلی DEA را به صورت مدل (۱) می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \hat{h}_0 &= \text{Max } \mu^T y_0 - \delta_1 \mu_0, \\ (P) \quad \text{s.t.} \\ w^T X - \mu^T Y + \delta_1 e^T \mu_0 &\geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ w^T x_0 &= 1, \\ w \in V, \mu \in U, \quad \delta_1 \delta_2 (-1)^{s_3} \mu_0 &\geq 0, \end{aligned} \quad (1)$$

که دوآل مساله فوق به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \text{Min } \theta, \\ (D) \quad \text{s.t.} \\ X\lambda - \theta x_0 &\in V^*, \\ Y\lambda + y_0 &\in U^*, \\ \delta_1 (e^T \lambda + \delta_2 (-1)^{\delta_3} \lambda_{n+1}) &= \delta_1, \\ \lambda \geq 0, \quad \lambda_{n+1} \geq 0, \quad \theta &\in R^1, \end{aligned} \quad (2)$$

که حالت‌های زیر را داریم [7]:

۱. وقتی $\delta_1 = 0$ ، مساله‌های (P)، (D) مدل CCR با ساختار قیود مخروطی را ارائه می‌دهند.
۲. وقتی $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0$ ، مساله‌های (P)، (D) مدل BCC، با ساختار قیود مخروطی را ارائه می‌دهند.
۳. وقتی $\delta_1 = \delta_2 = 1, \delta_3 = 0$ ، مساله‌های (P)، (D) مدل $(FG)BCC-CCR$ با ساختار قیود مخروطی را ارائه می‌دهند.
۴. وقتی $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1$ ، مساله‌های (P)، (D) مدل $(ST)BCC-CCR$ با ساختار مخروطی را ارائه می‌دهند.
۵. اگر $U = R_+^s, V = R_+^m$ مدل‌های بالا مدل‌های CCR و BCC و $(FG)BCC-CCR$ و $(ST)CCR-BCC$ معمولی را نشان می‌دهند.

تعریف ۴- مجموعه T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T = \left\{ t = (t_0, \dots, t_s)^T \mid (t_1, \dots, t_s)^T \in U, \sum_{r=1}^s t_r = 1, \delta_1 \delta_2 (-1)^{\delta_3} t_0 \geq 0 \right\},$$

$$a_{ij} = \frac{\frac{y_o^t}{x_{io}}}{\frac{y_j^t}{x_{ij}}}.$$

به طوری که

$$y_j^t = \sum_{r=1}^s t_r y_{rj} - \delta_1 t_0, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m.$$

$$V(j_0) = \left\{ P = (p_1, \dots, p_m)^T \mid \left(\frac{p_1}{x_{1o}}, \dots, \frac{p_m}{x_{mo}} \right)^T \in V \right\} \subseteq R_+^m.$$

$$\hat{S}_2 = \left\{ (q_1, \dots, q_n)^T \mid \tilde{e}^T q \geq 0 \right\}, \hat{S}_1 = \left\{ p = (p_1, \dots, p_m)^T \mid e^T p = 1, p \in V(j_0) \right\}.$$

و بازی دو نفره با مجموع صفر با ماتریس پرداخت $(pay-off(a_{ij}^t)_{m \times n})$ به صورت زیر نشان می دهیم.

$$G' = \{I, II, S_1, S_2, A^T, V(j_0), R_+^n\}.$$

اکنون مساله های زیر را در نظر می گیریم:

$$\text{Min } \alpha_t = \hat{\alpha}_t,$$

$$(P^t) \quad s. t.$$

$$A^t q - \alpha_t e \in V(j_0),$$

$$\tilde{e}^T q = 1,$$

$$q \in R_+^n.$$

$$\text{Max } \beta_t = \hat{\beta}_t,$$

$$(D^t) \quad s. t.$$

$$-P^T A^t + \beta_t \tilde{e}^T \leq 0,$$

$$e^T P = 1,$$

$$P \in V(j_0).$$

قضیه ۲- مساله D^t معادل مساله (۱) است [3].

قضیه ۳- استراتژی بهینه برای $G' = (I, II, S_1, S_2, A^T, V(j_0), R_+^n)$ از حل مساله های $(P^t), (D^t)$ به دست می آید [3].

۴- DEA-GT با ورودی و خروجی‌های بازه‌ای

می‌دانیم در DEA، جهت محاسبه کران بالای کارایی واحد تحت ارزیابی را در بهترین شرایط واحدها و سایر واحدها را در بدترین شرایط قرار می‌دهیم و برای محاسبه کران پایین کارایی واحد تحت ارزیابی را در بدترین شرایط و سایر واحدها را در بهترین شرایط قرار می‌دهیم [8]. پس اگر مدل کلی DEA را در صورتی که داده‌ها به صورت بازه‌ای باشند در نظر بگیریم.

$$\theta^* = \text{Max } \mu^T [y_0^L, y_0^U] - \delta_1 \mu_0,$$

s. t.

$$w^T [x_j^L, x_j^U] - \mu^T [y_j^L, y_j^U] + \delta_1 \epsilon^T \mu_0 \geq 0, \quad (3)$$

$$w^T [x_0^L, x_0^U] = 1,$$

$$w \in V, \mu \in U, \delta_1 \delta_2 (-1)^{\delta_3} \mu_0 \geq 0, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n.$$

پس کران بالا و پایین کارایی را به صورت زیر است.

$$\theta^L = \text{Max } \mu^T y_0^L - \delta_1 \mu_0 = \hat{h}_0,$$

s. t.

$$\mu^T y_j^U - w^T x_j^L + \delta_1 \mu_0 \leq 0, \quad j = 1, \dots, h, \quad j \neq 0,$$

$$\mu^T y_0^L - w^T x_0^U + \delta_1 \mu_0 \leq 0,$$

$$w^T x_0^U = 1,$$

$$w \in V, \mu \in U, \delta_1 \delta_2 (-1)^{\delta_3} \mu_0 \geq 0, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \{0, 1\}.$$

$$\theta^U = \text{Max } \mu^T y_0^U - \delta_1 \mu_0,$$

s. t.

$$\delta_1 \mu_0 + \mu^T y_j^L - w^T x_j^U \leq 0, \quad j \neq 0,$$

$$\delta_1 \mu_0 + \mu^T y_0^U - w^T x_0^L \leq 0, \quad j = 0,$$

$$w^T x_0^L = 1,$$

$$w \in V, \mu \in U, \delta_1 \delta_2 (-1)^{\delta_3} \mu_0 \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

قضیه ۴- فرض کنید $\theta^* \in [\theta^L, \theta^U]$ **آن‌گاه** $y_{rj} \in [y_{rj}^L, y_{rj}^U]$ **و** $x_{ij} \in [x_{ij}^L, x_{ij}^U]$

اثبات: فرض کنیم $y_{rj} \in [y_{rj}^L, y_{rj}^U]$ **و** $x_{ij} \in [x_{ij}^L, x_{ij}^U]$ **آن‌گاه** $x_{ij} = \beta_{ij} x_{ij}^U + (1 - \beta_{ij}) x_{ij}^L$ **که** $0 \leq \beta_{ij} \leq 1$ **و** $y_{rj} = \beta'_{rj} y_{rj}^U + (1 - \beta'_{rj}) y_{rj}^L$ **که** $0 \leq \beta'_{rj} \leq 1$ **اگر مقادیر فوق را در مدل قرار دهیم [3].**

$$\begin{aligned}
 \text{Max } \theta &= \sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0}^L + \sum_{r=1}^s \mu_r \beta'_{rj} (y_{r0}^u - y_{r0}^L) - \delta_1 \mu_0, \\
 \text{s.t.} \\
 \sum_{i=1}^m w_i x_{i0}^L + \sum_{i=1}^m w_i \beta_{ij} x_{i0}^u - \sum_{i=1}^m w_i \beta_{ij} x_{i0}^L &= 1, \\
 \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj}^L + \sum_{r=1}^s \mu_r \beta'_{rj} y_{rj}^u - \sum_{r=1}^s \mu_r \beta'_{rj} y_{rj}^L \\
 - \left[\sum_{i=1}^m w_i x_{ij}^L + \sum_{i=1}^m w_i \beta_{ij} x_{ij}^u - \sum_{i=1}^m w_i \beta_{ij} x_{ij}^L \right] &\leq 0, \\
 0 \leq \beta_{ij} \leq 1, \quad 0 \leq \beta'_{ij} \leq 1. \\
 w \in V, \mu \in U, \delta_1 \delta_2 (-1)^{\delta_3} \mu &\geq 0, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \{0, 1\}. \\
 i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad r = 1, \dots, s.
 \end{aligned} \tag{۴}$$

مدل فوق به دلیل عوامل $w_i \beta_{ij}$ و $\mu_r \beta'_{rj}$ هنوز فرم غیر خطی دارد. بنابراین، با تغییر متغیرهای زیر آن را به فرم خطی تبدیل می‌کنیم.

$$w_i \beta_{ij} = q_{ij}, \quad 0 \leq q_{ij} \leq w_i, \quad \mu_r \beta'_{rj} = p_{rj}, \quad 0 \leq p_{rj} \leq \mu_r.$$

اگر تغییر متغیرهای فوق را اعمال کنیم. از آنجا که مساله‌های فوق مینیم‌سازی است $-p_{r0} \leq 0, (y_{r0}^u - y_{r0}^L) \geq 0$ پس $\sum_{r=1}^s (-p_{r0})(y_{r0}^u - y_{r0}^L) \leq 0$ مینیم مقدار خود را زمانی می‌گیرد که $p_{r0} = u_r$ و در مساله‌های مینیم‌سازی هرچه ناحیه شدنی بزرگ‌تر باشد جواب بهین بدتر نمی‌شود. بنابراین، برای حصول بهترین جواب باید داشته باشیم.

$$q_{i0} = 0, \quad p_{rj} = 0, \quad q_{ij} = r_i.$$

به‌طوری که $i = 1, \dots, m, \quad j \neq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad r = 1, \dots, s$

با قرار دادن مقادیر فوق در مدل (۴) مدل متناظر با مساله θ^U را داریم که موید این نتیجه است که DMU_0 در ایده‌آل‌ترین شرایط قرار دارد و سایر $DMUs$ در بدترین شرایط قرار دارند و برای بررسی نامطلوب‌ترین جواب، پارامترها را به‌صورت زیر تعیین می‌کنیم.

$$P_{r0} = 0, \quad r = 1, \dots, s, \quad P_{rj} = \mu_r.$$

$$q_{r0} = r_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad q_{ij} = 0,$$

که $j \neq 0$ و $j = 1, \dots, n$ با اختیار مقادیر فوق در مدل (۳) مدل متناظر با مساله θ^L به‌دست می‌آید که موید این نتیجه است که DMU_0 در بدترین شرایط و سایر $DMUs$ در بهترین شرایط قرار دارند. اکنون تعاریفی را به‌صورت زیر قرارداد می‌کنیم. فرض کنید $[a, b]$ و $[c, d]$ و دو بازه باشند و عملیات بازه‌ای را به‌صورت زیر داریم.

$$1. [a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$

$$2. [a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$$

$$3. [a, b] \times [c, d] = [a \times d, b \times c]$$

$$4. [a, b] \div [c, d] = [a \div d, b \div c]$$

که d, c, b, a اعداد مثبت هستند. اکنون مدل بازی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. که معادل مدل کلی DEA است و استراتژی بهینه مدل بازی $G(I, II, S_1, S_2, A^t, V(j_0), R_+^n)$ از حل مساله‌های زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha} = \text{Min} \quad & \alpha_t, \\
 \text{s.t.} \quad & \\
 & \sum_{j=1}^n [a_{ij}^L, a_{ij}^U] q_j \in V^*(j_0), \\
 & \sum_{j=1}^n q_j = 1, \\
 & q_j \geq 0.
 \end{aligned} \tag{۵}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta} = \text{Max} \quad & \beta_t, \\
 \text{s.t.} \quad & \\
 & -\sum_{i=1}^m P_i [a_{ij}^L, a_{ij}^U] + \beta_t \leq 0, \\
 & \sum_{i=1}^m P_i = 1, \\
 & \left(\frac{P_1}{[x_{10}^L, x_{10}^U]}, \dots, \frac{P_m}{[x_{m0}^L, x_{m0}^U]} \right) \in V.
 \end{aligned} \tag{۶}$$

قضیه ۵- مساله‌های (۵) و (۶) قابل تبدیل به مساله‌های برنامه‌ریزی خطی هستند.

اثبات: با توجه به تعریف مخروط قطبی منفی، در مساله (۵) فقط قید اول یعنی $\sum_{j=1}^n [a_{ij}^L, a_{ij}^U] q_j \in V^*(j_0)$ غیرخطی است، این قید معادل $\sum_{j=1}^n [\lambda a_{ij}^U + (1-\lambda)a_{ij}^L] q_j \in V^*(j_0)$ است.

وقتی $\lambda \in [0, 1]$ و فرض کنیم $p \in V(j_0)$ ، چون $p \geq 0$ با تعریف مخروط قطبی منفی داریم $\sum_{j=1}^n p_j (\lambda a_{ij}^U + (1-\lambda)a_{ij}^L) q_j \leq 0$ چون $P_i \geq 0$ پس $\sum_{j=1}^n (\lambda a_{ij}^U + (1-\lambda)a_{ij}^L) q_j \leq 0$ پس قید فوق به صورت خطی است. برای مساله (۶) داریم:

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & \beta_t, \\
 \text{s.t.} \quad & \\
 & -\sum_{i=1}^m P_i [a_{ij}^L, a_{ij}^U] + \beta_t \leq 0, \\
 & \sum_{i=1}^m P_i = 1, \\
 & \left(\frac{P_1}{[x_{10}^L, x_{10}^U]}, \dots, \frac{P_m}{[x_{m0}^L, x_{m0}^U]} \right) \in V.
 \end{aligned}$$

پس از تبدیلات لازم داریم:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } \beta^t, \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{i=1}^m \frac{p'_i [a_{ij}^L, a_{ij}^U]}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m [x_{k0}^L, x_{k0}^U]} + \frac{1}{\prod_{i=1}^m [x_{i0}^L, x_{i0}^U]} \beta_t \leq 0, \\
 & \sum_{i=1}^m \frac{p'_i}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m [x_{k0}^L, x_{k0}^U]} = \frac{1}{\prod_{i=1}^m [x_{i0}^L, x_{i0}^U]}, \\
 & (p'_1, \dots, p'_m) \in V.
 \end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } \beta^t, \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_{i=1}^m P'_i [b_{ij}^L, b_{ij}^U] + [b^L, b^U] \beta^t \leq 0, \\
 & \sum_{i=1}^m P'_i [d_i^L, d_i^U] = [b^L, b^U], \\
 & p' \in V.
 \end{aligned}$$

به طوری که

$$[b^L, b^U] = \frac{1}{\prod_{i=1}^m [x_{i0}^L, x_{i0}^U]}, \quad [b_{ij}^L, b_{ij}^U] = \frac{[a_{ij}^L, a_{ij}^U]}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m [x_{k0}^L, x_{k0}^U]}, \quad [d_i^L, d_i^U] = \frac{1}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m [x_{k0}^L, x_{k0}^U]},$$

که نشان می دهد مساله (۶) یک مساله برنامه ریزی خطی است.

که برای حل مساله های (۵) و (۶) که داده های بازه ای دارند بهترین و بدترین شرایط را در نظر می گیریم.

$$\begin{aligned}
 \alpha_1^* &= \text{Min } \alpha_1, & \alpha_2^* &= \text{Min } \alpha_1, \\
 \text{s.t.} & & \text{s.t.} & \\
 \sum_{j=1}^n a_{ij}^L q_j - \alpha_1 &\leq 0, & \sum_{j=1}^n a_{ij}^U q_j - \alpha_1 &\leq 0, \\
 \sum_{j=1}^n q_j &= 1, & \sum_{j=1}^n q_j &= 1, \\
 q_j &\geq 0, \quad j=1, \dots, n. & q_j &\geq 0, \quad j=1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

داریم $\alpha^* \in [\alpha_1^*, \alpha_2^*]$ و برای حل مساله (۶) مخروط V را به صورت $V = M^t \alpha$ که $\alpha \geq 0$ در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \beta_1^* &= \text{Max } \beta^t, \\ \text{s.t.} \\ \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n M_{ij} \alpha_j \right) b_{ij}^L + b^U \beta^t &\leq 0. \\ \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n M_{ij} \alpha_j \right) d_i^L &= b^U. \\ \alpha_j &\geq 0, j = 1, \dots, n \text{ و } \beta^+ \text{ آزاد} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_2^* &= \text{Max } \beta^t, \\ \text{s.t.} \\ \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n M_{ij} \alpha_j \right) b_{ij}^u + b^L \beta^t &\leq 0. \\ \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n M_{ij} \alpha_j \right) d_i^u &= b^L. \\ \alpha_j &\geq 0, j = 1, \dots, n \text{ و } \beta^+ \text{ آزاد} \end{aligned}$$

و داریم $\beta^* \in [\beta_1^*, \beta_2^*]$.

در حل مساله‌های فوق از این واقعیت استفاده کردیم که برای نامعادله $\sum_{j=1}^n [a_j^l, a_j^u] \geq [b^l, b^u]$

نامعادلات $\sum_{j=1}^n a_j^l x_j \geq b^u$ ، $\sum_{j=1}^n a_j^u x_j \geq b^l$ به ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار بازه نامعادله می‌باشند.

مثال ۱- سه واحد تصمیم‌گیرنده با دو ورودی و یک خروجی را در نظر بگیرید.

جدول ۱- سه واحد تصمیم‌گیرنده با دو ورودی و یک خروجی.

Table 1- Three decision-making units with two inputs and one output.

	DMU ₁	DMU ₂	DMU ₃
I ₁	[1,3]	[1,3]	[2,4]
I ₂	[1,5]	[3,6]	[4,6]
O ₁	[2,5]	[3,5]	[5,7]

$$A^t = \begin{bmatrix} [\frac{2}{15}, \frac{15}{2}] & [\frac{2}{15}, 5] & [\frac{4}{21}, 4] \\ [\frac{2}{15}, \frac{25}{2}] & [\frac{6}{25}, 10] & [\frac{8}{35}, 6] \end{bmatrix}.$$

برای حل مدل فوق δ_1 را برابر با صفر اختیار می‌کنیم که با این انتخاب مدل CCR با قیود مخروط محدب را داریم. پس از محاسبه عناصر ماتریس پرداخت داریم.

که اگر فرض کنیم $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ باشد با قراردادن نتایج فوق در مساله‌های (۵) و (۶)، نتایج زیر به دست می‌آید:

$$\alpha_2^* = 7/5, \quad \alpha_1^* = 0/19, \quad \theta^U = 4/5, \quad \theta^L = 0/21,$$

که با انتخاب مخروطی که در شرایط مساله به خوبی صدق کند نتایج به هم نزدیک تر می شود.

۵- نتیجه گیری

در علم تحقیق در عملیات همواره به دنبال راهها و روش های مقرون به صرفه هستیم.

راهها و روش هایی که برای بعضی مساله ها، مناسب و برای بعضی دیگر نامناسب می باشند. با توجه به رابطه ای که میان نظریه بازی ها و DEA وجود دارد، انتخاب راه های مناسب از اهمیت خاصی برخوردار است. با توجه به داده های موجود در بعضی مواقع از DEA برای مساله های نظریه بازی ها و برعکس، کمک گرفت. وقتی ورودی ها و خروجی های ما بازه ای باشند. برای حل مساله های DEA می توان از نظریه بازی ها کمک گرفت. چون عملیات بازه ای به کمک کامپیوتر آسان است و مساله های بیان شده در بالا از تعداد قیود و متغیرها کمتری نسبت به مدل های DEA برخوردار است و با انتخاب مخروط مناسب می توان نتایج را به هم نزدیک تر کرد [9].

منابع

- [1] Zhu, J. (2009). *Quantitative models for performance evaluation and benchmarking. Data envelopment analysis with spreadsheets*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-06647-9>
- [2] Banker, R. D. (1980). A game theoretic approach to measuring efficiency. *European journal of operational research*, 5(4), 262–266. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(80\)90058-2](https://doi.org/10.1016/0377-2217(80)90058-2)
- [3] Hao, G., Wei, Q., & Yan, H. (2000). The generalized DEA model and the convex cone constrained game. *European journal of operational research*, 126(3), 515–525. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(99\)00306-9](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(99)00306-9)
- [4] Jahanshahloo, G. R., Lotfi, F. H., & Nikomaram, H. (2008). *Data envelopment analysis and its applications. (In Persian)*. Islamic Azad University. <https://B2n.ir/wb7934>
- [5] Rousseau, J. J., & Semple, J. H. (1995). Two-person ratio efficiency games. *Management science*, 41(3), 435–441. <https://doi.org/10.1287/mnsc.41.3.435>
- [6] Huang, H., Zhou, C., & Deng, H. (2024). A DEA game cross-efficiency model with loss aversion for contractor selection. *Mathematics*. <https://doi.org/2227-7390/12/10/1519>
- [7] Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*, 2(6), 429–444. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(78\)90138-8](https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8)
- [8] Entani, T., Maeda, Y., & Tanaka, H. (2002). Dual models of interval DEA and its extension to interval data. *European journal of operational research*, 136(1), 32–45. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(01\)00055-8](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(01)00055-8)
- [9] Jablonsky, J., Fiala, P., Smirlis, Y., & Despotis, D. (2004). DEA with interval data: An illustration using the evaluation of branches of a Czech Bank. *CEJOR. central european journal of operations research*, 12. <https://B2n.ir/uj9406>