

**Paper Type: Original Article****Ranking in Project Scheduling with Limited Resources****Hamid Reza Yousefzade^{1,*}, Leila Nezam¹**¹ Department of Mathematics, Payame Noor University (PNU), Iran; usefzadeh.math@pnu.ac.ir; nezam.leila@gmail.com.**Citation:**Yousefzade, H. R., & Nezam, L. (2025). Ranking in project scheduling with limited resources. *Management: Modeling, analysis and applications*, 2(2), 80-92.

Received: 06/11/2024

Reviewed: 26/01/2025

Revised: 13/03/2025

Accepted: 19/04/2025

Abstract**Purpose:** This paper examines the Fuzzy Resource-Constrained Project Scheduling Problem (Fuzzy RCPSP). The main objective is to develop a feasible schedule that minimizes the project completion time.**Methodology:** Two common approaches, namely serial and parallel scheduling, are applied to solve the fuzzy resource-constrained project scheduling problem. Furthermore, a new priority rule is introduced, based on the criticality of activities and the number of resources required for eligible activities in the decision set.**Findings:** Numerical results indicate that the schedules generated by the parallel scheduling method provide higher quality solutions compared to the serial scheduling method, particularly with respect to minimizing project completion time.**Originality/Value:** The combination of the parallel scheduling approach and the proposed priority rule can significantly improve the performance of project scheduling with renewable resource constraints in fuzzy environments.**Keywords:** Project scheduling, Crisis route, Scheduling method, Priority rule, Fuzzy logic.

Corresponding Author: usefzadeh.math@pnu.ac.ir

<https://doi.org/10.22105/mmaa.v2i2.89>Licensee. **Management: Modeling, Analysis and Application**. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



رتبه‌بندی در زمان‌بندی پروژه با منابع محدود

حمیدرضا یوسف‌زاده^۱، لیلا نظام^۱

^۱گروه ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، ایران.

چکیده

هدف: این مقاله به بررسی مساله زمان‌بندی پروژه با محدودیت منابع به صورت فازی^۱ می‌پردازد. هدف اصلی ارائه راهکاری برای دستیابی به یک زمان‌بندی شدنی است که منجر به حداقل‌سازی زمان اتمام پروژه شود.

روش‌شناسی پژوهش: در این پژوهش، دو رویکرد مرسوم سری و موازی برای حل مسایل زمان‌بندی پروژه‌های فازی با محدودیت منابع به کار گرفته شده است. علاوه بر این، یک قاعده اولویت جدید معرفی گردید که مبتنی بر میزان بحرانی بودن فعالیت‌ها و تعداد منابع مورد نیاز برای فعالیت‌های واجد شرایط در مجموعه تصمیم‌گیری است.

یافته‌ها: نتایج عددی حاصل از آزمایش‌ها نشان دادند که زمان‌بندی موازی، در مقایسه با زمان‌بندی سری، کیفیت بالاتری از نظر کاهش زمان اتمام پروژه دارد.

اصالت/ارزش افزوده علمی: استفاده از رویکرد زمان‌بندی موازی همراه با قاعده اولویت پیشنهادی، می‌تواند بهبود معناداری در عملکرد زمان‌بندی پروژه‌ها با محدودیت منابع در محیط‌های فازی ایجاد کند.

کلیدواژه‌ها: زمان‌بندی پروژه، مسیر بحرانی، شیوه زمان‌بندی، قانون اولویت، منطق فازی.

۱- مقدمه

مساله زمان‌بندی پروژه با منابع محدود^۲ در سال ۱۹۶۳ توسط ویست مطرح شد. این مساله یکی از پیچیده‌ترین مسایل تحقیق در عملیات است. در دهه‌های اخیر، پیشرفت‌های قابل توجهی در تدوین روش‌های حل دقیق و ابتکاری آن به وجود آمده و روش‌های جدید بهینه‌سازی در حل آن، توسط مورینگ و همکارانش در سال ۲۰۰۳ به کار گرفته شده است [1]. همچنین مساله زمان‌بندی پروژه با *RCPSp* و پردازش فازی در سال ۲۰۰۸ توسط بهاسکار و پال با قاعده اولویتی جدید انجام شده است [2]. در این مقاله سعی شده است تا با مبنا قرار دادن [2] و استفاده از شیوه‌های زمان‌بندی مختلف سعی در بهبود پارامترها و راهکارهای ارائه شده در [2] بالاختص در نحوه محاسبه قاعده اولویت باشیم. در این مقاله فقط فعالیت‌ها با زمان پردازش فازی فرض شده‌اند و هیچ‌گونه عدم قطعیت و ابهامی در پارامترهای دیگر وجود ندارد. در بخش دوم مساله توصیف می‌شود. در بخش سوم برای حل آن مساله روش‌های ابتکاری پیشنهاد می‌شود. اصل گسترش اعداد فازی و رتبه‌بندی این اعداد در بخش چهارم بیان شده است. در بخش

¹ Fuzzy Resource-Constrained Project Scheduling Problem (Fuzzy RCPSP)

² Resource Constained Project Scheduling Problem (RCPSP)

پنجم راهکاری برای حل مساله پیشنهاد می‌گردد و در پایان تاثیر شیوه‌های زمان‌بندی سری و موازی با قاعده اولویتی جدید بر دسته مسایل نمونه‌ای استاندارد کولیش مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲- توصیف مساله

در این مقاله، زمان‌بندی یک پروژه با محدودیت‌های منابع متعدد با در نظر گرفتن فعالیت‌هایی با زمان پردازش فازی مورد مطالعه قرار می‌گیرد [3]. زمان پردازش فعالیت‌ها توسط متخصصین تخمین زده می‌شود که اغلب غیردقیق است. بنابراین، با در نظر گرفتن این عدم دقت‌ها و فراهم کردن یک مدل واقعی، اعداد فازی می‌توانند برای بیان زمان فعالیت استفاده شوند. در این مقاله زمان پردازش فعالیت با یک عدد فازی مثلثی نشان داده می‌شود. مساله مورد بحث در این مقاله با هدف به حداقل رساندن زمان اتمام پروژه دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد:

۱. مجموعه‌ای از فعالیت‌ها که هر یک از آن‌ها یک حالت اجرایی دارند.
۲. پردازش زمان فعالیت توسط اعداد فازی مثلثی نشان داده شده است.
۳. میزان مورد نیاز منابع ثابت و فقط منابع تجدیدپذیر در نظر گرفته شده‌اند.
۴. برای ورود هر فعالیت به مرحله اجرا و دریافت منابع مورد نیاز، قاعده اولویت از پیش تعیین شده در نظر گرفته می‌شود.
۵. وقفه یا شکست در اجرای فعالیت مجاز نیست.

کلیه نمادهایی را که در مقاله برای بیان و حل مساله مورد استفاده قرار گرفته است در جدول ۱ معرفی می‌شوند:

جدول ۱- نمادها.
Table 1- Symbols.

$A(x)$	نشان‌دهنده عدد فازی
A_α	مجموعه α -برش، $\alpha \in [0,1]$
$\mu(x)$	نشان‌دهنده تابع عضویت مجموعه فازی
n	تعداد مراحل با z فعالیت $\{1,2,\dots,N\}$
D_n	مجموعه تصمیم (فعالیت‌های واجد شرایط برای زمان‌بندی) در مرحله n
D_{nm}	زیرمجموعه m^{th} از مجموعه تصمیم (برای ورود به مرحله اجرا) در مرحله $n \in \{1,2,3,\dots\}$
Z_{nm}	معیار اولویت برای زیرمجموعه D_{nm}
A_n	مجموعه فعالیت‌های فعال (فعالیت‌های در حال اجرا) در مرحله n
C_n	مجموعه فعالیت‌های تکمیل‌شده (فعالیت‌هایی که اجرای آن‌ها تمام شده) در مرحله n
S_n	مجموعه فعالیت‌های فعال زمان‌بندی شده در مرحله n
t_n	زمان تصمیم‌گیری در مرحله n
j	شماره فعالیت پروژه $\{1,2,\dots,J\}$
ST_j	زمان شروع فعالیت j
FT_j	زمان پایان فعالیت j
v_j	اولویت فعالیت j
P_j	مجموعه فعالیت‌های پیش‌نیاز فعالیت j
d_j	مدت زمان پردازش فعالیت j
k	$k \in \{1,2,\dots,K\}$ نوع منبع
R_k	کل منابع موجود از نوع k
R_{jk}	میزان نیاز به منابع تجدیدپذیر نوع k برای فعالیت j
r_{kt}	میزان باقی‌مانده از منبع تجدیدپذیر نوع k در زمان t ، $t \in \{1,2,\dots,T\}$
T	مدت زمان اتمام پروژه بدون در نظر گرفتن محدودیت منابع
T_k	مدت زمان اتمام پروژه با حداقل زمان اجرا فقط با محدودیت منبع نوع k
T_c	مدت زمان مسیر بحرانی پروژه
M_j	حداکثر زمان پردازش باقی‌مانده از فعالیت j^{th} تا فعالیت نهایی
p_k	بحران منبع نوع k
q_k	بحران زمانی منبع نوع k

۳- روش های ابتکاری پیشنهادی

حل مسایل زمان بندی پروژه با محدودیت منابع متعدد دارای سه بخش اصلی است [2]:

۱. محاسبه مقادیر اولویت
۲. شناسایی فعالیت های بحرانی
۳. رعایت محدودیت منابع و محدودیت پیش نیازی

اکنون درباره هریک از این موارد بحث خواهد شد. نخست، اولویت ها بررسی می شوند. یک فعالیت زمانی شروع می شود که تمامی فعالیت های پیش نیاز آن به اتمام رسیده باشند. بنابراین، در هر مرحله تصمیم گیری مجموعه ای از فعالیت ها که فعالیت های پیش نیاز آن زمان بندی و به اتمام رسیده باشند، وجود دارد. این مجموعه از فعالیت ها با D_n مشخص می شود. اگر همه فعالیت های مجموعه D_n با توجه به محدودیت منابع موجود نتوانند زمان بندی شوند، زیرمجموعه هایی تک عضوی از مجموعه D_n تشکیل داده می شوند و با D_{nm} نمایش داده می شوند. اکنون m زیرمجموعه از فعالیت ها در مرحله تصمیم گیری n در دسترس هستند. زیرمجموعه ای در بین زیرمجموعه های m با استفاده از یک قانون اولویت از پیش تعیین شده، از اولویت بالاتری برخوردار است. در این مقاله قاعده اولویت معرفی خواهد شد و تحت عنوان شاخص عملکرد زمان بندی^۱ نامیده می شود. به عبارت دیگر جهت زمان بندی مساله، بحرانی ترین فعالیت در نظر گرفته می شود و زیرمجموعه ای که بالاترین مقدار SPI را در بین تمامی زیرمجموعه های رقیب دارد، انتخاب می شود.

۳-۱- محاسبه SPI

در این مقاله، عامل بحران برای هر فعالیت، طول بزرگترین مسیر باقی مانده از شروع آن فعالیت تا انتهای مسیر می باشد که با M_j نمایش داده می شود. همچنین طول بزرگترین مسیر از فعالیت اول تا فعالیت آخر در یک پروژه مسیر بحرانی نامیده می شود. با توجه به نمادهای جدول ۱ تعاریف زیر ارائه می گردد.

$$j \text{ میزان فعالیت بحران } = \frac{M_j}{T_c} \quad (1)$$

مقدار T_c طول مسیر بحرانی پروژه است و در سرتاسر پروژه ثابت می ماند.

$$= \prod_{k=1}^k \frac{R_{jk}}{r_{kt}} \text{ میزان نسبی نیاز به منبع} \quad (2)$$

اکنون نمادهای p_k و q معرفی می شوند که در هر مرحله تصمیم گیری مساله، مقادیری ثابت هستند. وزن هر نوع منبع که نشان دهنده بحران آن نوع منبع است، در مساله توسط رابطه (۳) محاسبه می شود:

$$p_k = \frac{\sum_{j \in D_n} R_{kj}}{R_k} \quad (3)$$

حال زمان اتمام پروژه، با فرض وجود محدودیت فقط یک نوع از منابع محاسبه می شود که با T_k برای منبع نوع k نشان داده می شود؛ لذا رابطه (۴) می تواند به عنوان وزن زمانی برای عامل بحران SPI به کار برود:

$$q = \frac{\max_{k=1}^K (T_k)}{T} \quad (4)$$

¹ Schedule Performance Index (SPI)

هدف ارایه یک قانون اولویت برای انتخاب زیر مجموعه D_{nm} از D_n که از اولویت بالاتری برخوردار است، می‌باشد.

$$(\Delta)Z_{nm} = \prod_{k=1}^K \left(\frac{R_{kf}}{r_{kt}} \right)^{p_k} \cdot \left(\frac{M_j}{T_c} \right)^q. \quad (5)$$

بدیهی است که اگر یک یا چند نوع منبع مورد نیاز فعالیت‌ها در یکی از زیر مجموعه‌های D_{nm} در مرحله تصمیم‌گیری صفر باشد، رابطه (۲) صفر شده و در نتیجه کل عبارت Z_{nm} صفر می‌شود؛ لذا در این شرایط موارد زیر پیشنهاد می‌شود [2]:

۱. اگر یک یا چندین نوع از منابع، اما نه همه مورد نیاز نباشند، در این صورت می‌توان فعالیت‌های مربوطه را به تاخیر انداخت. در این حالت چون مقداری که از رابطه (۲) حاصل شده، صفر است، این مقدار با یک عدد واقعی خیلی کوچک (۰/۰۰۰۱) جایگزین می‌شود.
۲. در هر مرحله تصمیم‌گیری n اگر مجموعه فعالیت‌های تصمیم‌گیری D_n به هیچ نوع از منابع نیاز نداشته باشد، تمامی فعالیت‌های تصمیم‌گیری باید زمان‌بندی شوند.

۳-۲- شیوه‌های زمان‌بندی حل مساله تخصیص منابع

شیوه‌های زمان‌بندی حل ابتکاری مساله تخصیص منابع را می‌توان به‌طور کلی دو دسته سری و موازی تقسیم کرد [4].

۴- اصل گسترش اعداد فازی

اصل گسترش ابزار ریاضی مهمی برای توسعه نظریه‌های ریاضیات کلاسیک و عملیات مربوطه به محیط فازی است و زمینه‌ای را ایجاد می‌کند که پارامترهای یک تابع در مجموعه‌های فازی قابل محاسبه باشند. طبق اصل گسترش، اعداد فازی بر اساس تابع عضویت بیان می‌شود.

تابع معمولی مانند $f: (X \rightarrow Y)$ را در نظر بگیرید، تابع بر مقادیر X عمل کرده و Y را به عنوان خروجی می‌دهد. اکنون تابع f طبق اصل گسترش به جای این‌که بر یک نقطه از X عمل کند، بر یک زیر مجموعه فازی از X ، مانند A عمل می‌کند و خروجی زیر مجموعه فازی از Y ، مانند B می‌باشد. اصل گسترش روش این تعمیم را بیان می‌کند [5]، [6].

یکی از کاربردهای اصل گسترش، تعمیم عملگرهای جبری معمولی مانند جمع و ضرب، برای اعداد فازی می‌باشد [5].

تعریف ۱- یک مجموعه فازی نرمال محدب را یک عدد فازی (حقیقی) گوئیم، اگر:

$$1. \quad A(x) \text{ تک‌نمایی باشد. یعنی } \exists! x_0 \in R; A(x_0) = 1$$

$$2. \quad A(x) \text{ قطعه قطعه پیوسته باشد.}$$

$$3. \quad A_\alpha \text{ در یک بازه بسته برای هر تعریف } \alpha \in (0, 1) \text{ می‌شود.}$$

$$4. \quad \text{تکیه‌گاه } A \text{ کران‌دار باشد.}$$

در بین اعداد فازی، اعداد مثلثی اهمیت مضاعفی یافته‌اند [7]، [8].

تعریف ۲- عدد فازی مثلثی: عدد $A(x) = (a, b, c)$ یک عدد فازی است هرگاه:

$$a < b < c, \quad a, b, c \in R.$$

$$\mu_A(b) = 1, \quad \mu_A(a) = \mu_A(c) = 0,$$

که در آن $\mu_A(x)$ درجه عضویت x نامیده می‌شود.

۴-۱- عملگرهای جبری اعداد فازی مثلثی

فرض کنید $A(x) = (a_1, b_1, c_1)$ و $B(x) = (a_2, b_2, c_2)$ دو عدد فازی باشند. با توجه به مثبت بودن دو عدد فازی از فرمول‌های زیر برای محاسبات در این مقاله استفاده می‌شود [2].

$$A(x) + B(x) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2). \quad (۶)$$

$$A(x) - B(x) = (a_1 - c_2, b_1 - b_2, c_1 - a_2). \quad (۷)$$

$$A(x) \times B(x) \cong (a_1 \times a_2, b_1 \times b_2, c_1 \times c_2). \quad (۸)$$

$$m \times A(x) = (m \cdot a_1, m \cdot b_1, m \cdot c_1), \quad \text{for all } m \in R. \quad (۹)$$

$$(A(x))^k = ((a_1)^k, b_1^k, c_1^k), \text{ for all } k \in R. \quad (۱۰)$$

$$A(x) \div B(x) \cong (a_1 \div c_2, b_1 \div b_2, c_1 \div a_2). \quad (۱۱)$$

۴-۲- رتبه‌بندی اعداد فازی

روش‌های متعددی برای رتبه‌بندی اعداد فازی در مقالات و کتاب‌های مختلف ارایه گردیده است که هر کدام از آن‌ها دارای کاربرد خاصی می‌باشند و همچنین بین روش‌های مختلف برای رتبه‌بندی اعداد فازی اختلاف و تناقض مشاهده می‌شود [2] و [9-12].

به‌طور کلی چهار رویکرد مختلف می‌توان برای دسته‌بندی روش‌های رتبه‌بندی در نظر گرفت.

۱. رتبه‌بندی بر اساس مقایسه مقادیر غیرفازی‌سازی شده
۲. رتبه‌بندی بر اساس مقایسه گزینه‌ها با مجموعه‌های فازی مشخص
۳. رتبه‌بندی بر اساس مقایسه زوجی گزینه‌ها
۴. رتبه‌بندی بر اساس فاصله

که در این مقاله از رتبه‌بندی بر اساس مقایسه مقادیر غیرفازی‌سازی شده برای رتبه‌بندی اعداد فازی استفاده خواهد شد. در این دسته از روش‌های رتبه‌بندی، ابتدا با استفاده از یکی از روش‌های غیرفازی‌سازی، یک عدد معمولی به هر یک از اعداد فازی مربوط به گزینه‌های مختلف اختصاص داده می‌شود، سپس اعداد معمولی به‌دست آمده با یکدیگر مقایسه می‌گردند. روش‌های متعددی بر اساس این رویکرد پیشنهاد گردیده است که در ادامه این بخش، دو مورد از رایج‌ترین آن‌ها آورده می‌شود [13].

۱. روش آدامو^۱ در سال ۱۹۸۰ ارایه گردید که مبتنی بر α -برش‌های اعداد فازی می‌باشد. به این ترتیب که برای مقایسه دو عدد فازی مفروض A و B ، ابتدا یک مقدار خاص برای $\alpha \in [0, 1]$ انتخاب و سپس برش‌های α این دو مجموعه، به‌صورت $A_\alpha = [a_1, a_2]$ و $B_\alpha = [b_1, b_2]$ بیان می‌شوند. حال با توجه به تعریف آدامو داریم [13]:

$$a_2 \leq b_2 \rightarrow A \leq B. \quad (۱۲)$$

واضح است که تعریف فوق بستگی به مقدار α انتخاب شده دارد که معمولاً $\alpha > 0.5$ در نظر گرفته می‌شود.

۲. یاگر یک شاخص برای رتبه‌بندی اعداد فازی پیشنهاد نمود. شاخص یاگر^۲ برای عدد فازی A از رابطه (۱۳) به‌دست می‌آید [13].

$$Y(A) = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} g(x) \mu_A(x) dx}{\int_{\alpha}^{\beta} \mu_A(x) dx}. \quad (۱۳)$$

^۱ Adamo^۲ Yager

به‌طوری که α و β دو عدد حقیقی هستند. $g(x)$ یک فاکتور وزنی برای نشان دادن درجه اهمیت x می‌باشد. $g(x)$ در اعداد فازی مثلثی معمولاً برابر x در نظر گرفته می‌شود. $Y(A)$ بیان‌کننده مولفه طولی مرکز سطح تابع عضویت $\mu_A(x)$ می‌باشد.

این رتبه‌بندی در بسیاری از موارد از دقت بالایی برخوردار باشد؛ لذا در این مقاله، از این روش برای رتبه‌بندی اعداد استفاده خواهد شد.

۵- راهکار حل مساله

با توجه به مفاهیم اعداد فازی و به‌کارگیری شیوه‌های زمان‌بندی سری و موازی در این بخش لازم است تا با توجه به قاعده اولویت بیان شده Z_{nm} ، راهکاری برای زمان‌بندی مساله مدون گردد.

۱-۵- الگوریتم محاسبه بزرگترین مسیر

الگوریتم مسیریابی دایجسترا در سال ۱۹۵۹ توسط دانشمند هلندی ارائه شد [14]. این الگوریتم بهترین مسیر را بین دو راس در یک گراف پیدا می‌کند. در این مقاله، با الهام از این الگوریتم مسیریابی و با توجه به حل مسایل $RCPSP$ و نیاز به محاسبه مسیر بحرانی شبکه و محاسبه مسیر بحرانی هر فعالیت، بهترین مسیر را بزرگترین مسیر تعریف می‌کنیم. این الگوریتم در تکرارهای متوالی طول بزرگترین مسیر شبکه را محاسبه کرده و به‌عنوان مسیر بحرانی معرفی می‌کند. در این الگوریتم از سه مجموعه استفاده می‌شود.

۱. مجموعه M که اعضای آن به‌صورت M_j نشان داده می‌شوند و بیانگر بزرگترین مسیر از مبدا تا فعالیت j th در پایان هر تکرار الگوریتم است. این مقادیر در ابتدا به ازای زمان پردازش تمامی فعالیت‌ها برابر صفر می‌باشد.
۲. مجموعه P که اعضای آن به‌صورت P_j نمایش داده می‌شوند و در پایان هر تکرار زمان پردازش فعالیت پیش‌نیاز i را که فعالیت مبدا از طریق آن به این فعالیت در بزرگترین مسیر دسترسی دارد مشخص می‌کند. این مقادیر در ابتدا برای هر کدام از فعالیت‌ها صفر تعریف شده است.
۳. مجموعه U که اعضای آن فعالیت‌های بررسی نشده در الگوریتم است. این مجموعه در ابتدا شامل تمامی فعالیت‌های شبکه می‌باشد.

مراحل یافتن بزرگترین مسیر از هر فعالیت s به فعالیت نهایی در الگوریتم ۱ بیان شده است.

الگوریتم ۱- مراحل یافتن بزرگترین مسیر از هر فعالیت s به فعالیت نهایی.

Algorithm 1- Steps to find the longest path from each activity to the final activity.

۱. فعالیت s را به‌عنوان فعالیت جاری از U حذف کرده، مقدار M_s را برابر با زمان پردازش فعالیت قرار داده و مراحل ۲ تا ۴ را تکرار کن.
 ۲. به ازای هر فعالیت پس‌نیاز از فعالیت جاری z به یک فعالیت از مجموعه U مانند k مقدار $d_k + d_j$ را محاسبه کرده، اگر مقدار آن از M_k بزرگتر شد، جایگزین کن. در صورت جایگزین شدن مقدار جدید، مقدار P_k نیز برابر زمان انجام فعالیت j th شود.
 ۳. از مجموعه فعالیت‌های عضو U فعالیت با بزرگترین d_j را به‌عنوان فعالیت جاری انتخاب و از مجموعه U حذف کن.
 ۴. اگر U تهی است یا در مرحله ۳ هیچ فعالیتی برای انتخاب به‌عنوان فعالیت جاری جدید وجود ندارد به مرحله ۵ برو.
 ۵. مقدار M_j برای فعالیت j بزرگترین مسیر (بزرگترین زمان پردازش) از فعالیت شروع s به فعالیت نهایی را ثبت کن.
- در صورتی که s اولین فعالیت باشد، بزرگترین زمان پردازش زمان بحرانی است +.

۲-۵- الگوریتم زمان‌بندی پروژه با زمان فازی

با توجه به معیار SPI الگوریتم زمان‌بندی نهایی را می‌توان به‌صورت الگوریتم ۲ بیان کرد:

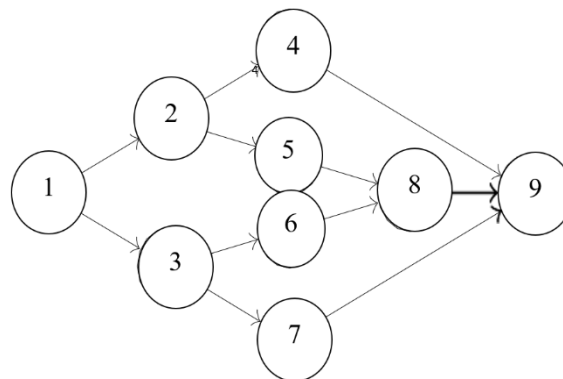
الگوریتم ۲- الگوریتم زمان بندی پروژه با زمان فازی.
Algorithm 2 - Fuzzy time project scheduling algorithm.

۱. شروع
۲. طول مسیر بحرانی پروژه را با استفاده از الگوریتم ۱ که عددی فازی است محاسبه کن.
۳. طول مسیر بحرانی هر فعالیت را با استفاده از الگوریتم ۱ که عددی فازی است محاسبه کن.
۴. مدت زمان پروژه (T) ، را با استفاده از الگوریتم سری یا موازی (بدون محدودیت منابع) محاسبه کن [4].
۵. مدت زمان پروژه با محدودیت منبع $k(T_k)$ را با استفاده از الگوریتم های سری و موازی محاسبه کن [4].
۶. مقادیر p_k و q که مقادیری حقیقی هستند را از رابطه های (۳) و (۴) محاسبه کن.
۷. مقدار $n := 1$ قرار بده.
۸. اگر $|c_n| > |c_n|$ برقرار است به مرحله ۹ برو در غیر این صورت به مرحله ۱۴ برو.
۹. اگر $|A|$ مجموعه D_n (فعالیت هایی که فعالیت های پیش نیازشان به اتمام رسیده است)، به روز کن.
۱۰. تمام زیرمجموعه های تک عضوی مجموعه D_n در مجموعه D_{nm} قرار گیرد.
۱۱. مقدار Z_{nm} هر زیرمجموعه از D_{nm} را با استفاده از رابطه (۵) محاسبه کن.
۱۲. زیرمجموعه ای با بالاترین مقدار Z_{nm} جهت زمان بندی با شیوه زمان بندی سری یا موازی انتخاب و زمان بندی کن [4].
۱۳. مقدار $n := n + 1$ قرار بده و به مرحله ۸ برو.
۱۴. پایان

شایان ذکر است برای مقایسه مقادیر فازی Z_{nm} ابتدا مرکز دو عدد فازی مقایسه می شوند، در صورت تساوی از روش یاگر استفاده می شود. اگر مقادیر در حالت استفاده از روش یاگر یکسان شدند، از روش آدامو استفاده می شود.

۶- مثال عددی

مثال ۱- پروژه شکل ۱ را که بر اساس شبکه گره ای رسم شده در نظر بگیرید. مقادیر پارامترها در جدول ۲ داده شده اند. تعداد منابع محدود و از نوع تجدیدپذیر هستند. کل منابع موجود از نوع A برابر ۵ واحد و از نوع B برابر ۶ واحد است. به عنوان نمونه سطر اول جدول ۲ نشان می دهد که فعالیت اول با توجه به شبکه شکل ۱ هیچ پیش نیازی ندارد، زمان پردازش نشان دهنده زمان انجام فعالیت است که در این زمان از ۳ واحد منبع A و ۵ واحد منبع B استفاده می شود.



شکل ۱- شبکه پروژه با منابع محدود و زمان پردازش فازی.

Figure 1- Project network with limited resources and fuzzy processing time.

جدول ۲- مشخصات شبکه‌های نوری فعال^۱ مربوط به مثال ۱.

Table 2- Specifications of active optical networks related to Example 1.

منبع B	منبع A	زمان پردازش	پیش‌نیازها	فعالیت
5	3	(2,4,6)	0	1
3	4	(2,3,5)	1	2
3	3	(3,5,7)	1	3
5	2	(2,4,6)	2	4
3	2	(1,2,3)	2	5
1	1	(4,6,9)	3	6
2	4	(2,3,5)	3	7
2	2	(0,1,2)	5,6	8
5	4	(4,6,9)	4,7,8	9

با توجه به شبکه واضح است که ۴ مسیر وجود دارد. طول مسیرها با استفاده از جمع زمان پردازش فعالیت‌ها از ابتدا تا انتهای مسیر در جدول ۳ محاسبه شده‌اند. برای مثال، سطر اول جدول ۳ زمان پردازش مسیر اول را نشان می‌دهد که شامل فعالیت‌های ۱، ۲، ۴ و ۹ می‌باشد، زمان پردازش این مسیر از مجموع زمان پردازش فعالیت‌های مسیر است که برابر با عدد فازی (۱۰، ۱۷، ۲۶) است.

جدول ۳- جدول مسیرهای شبکه مربوط به مثال ۱.

Table 3- Network routing table for Example 1.

شماره مسیر	مسیر	زمان پردازش
1	1 → 2 → 4 → 9	(10,17,26)
2	1 → 2 → 5 → 8 → 9	(9,16,25)
3	1 → → 6 → 8 → 9	(13,22,33)
4	1 → 3 → 7 → 9	(11,18,27)

با توجه به جدول ۳ مشاهده می‌شود، بزرگترین مسیر، مسیر سوم می‌باشد که به‌عنوان مسیر بحرانی انتخاب می‌گردد. شایان ذکر است که در مسایل با بعد بالاتر (تعداد فعالیت بیشتر) به دلیل پیچیدگی محاسباتی در پیدا کردن مسیر بحرانی، از الگوریتم ۱ استفاده شده است. با توجه به اطلاعات جدول ۴ مراحل زمان‌بندی مساله به شیوه زمان‌بندی موازی بیان می‌شود.

مرحله ۱-۱ $n=1$ در زمان صفر فعالیت ۱ وارد مجموعه تصمیم‌گیری می‌شود. با توجه به این‌که پیش‌نیاز ندارد و منبع کافی وجود دارد، وارد مجموعه اجرایی شده و زمان‌بندی می‌شود.

مرحله ۲-۲ $n=2$ در مدت زمان (۲، ۴، ۶) فعالیت ۱ پردازش و به اتمام می‌رسد. فعالیت ۱ وارد مجموعه تکمیل شده (C_2) می‌شود و فعالیت‌های ۲ و ۳ وارد مجموعه تصمیم‌گیری (D_2) می‌شوند. با توجه به این‌که منبع کافی برای ورود هر دو فعالیت به مجموعه اجرایی (A_2) وجود ندارد، از ۵ برای تعیین فعالیتی که از اولویت بالاتری برخوردار است استفاده می‌شود. مقدار q در همه زیرمجموعه‌ها یکسان است. بنابراین، با توجه به شیوه زمان‌بندی موازی، $T=33$ و $T_A=33$ و $T_B=44$ با استفاده از [4] محاسبه می‌شوند. با استفاده از رابطه (۴) داریم:

$$q = \frac{\max(33,44)}{33} = 1.333.$$

اکنون مراحل زیر در تمام زیرمجموعه‌های تک‌عضوی $D_2 = \{2,3\}$ اعمال می‌شود.

۱. محاسبه p_k : میزان منابع موردنیاز در این مرحله برای فعالیت‌های مجموعه D_2 برای هر نوع منبع محاسبه می‌شود. میزان منبع مصرفی از نوع A برابر است با $3 + 4 = 7$ واحد است. با توجه به موجودی کل منبع A که مقدارش ۵ می‌باشد داریم:

$$P_A = \frac{7}{5} = 1.4.$$

میزان منبع مصرفی از نوع B برابر است با $۷ = ۳ + ۴$ واحد است. با توجه به موجودی کل منبع B که مقدارش ۶ می باشد داریم:

$$P_B = \frac{7}{6} = 1.167.$$

۲. برای هر کدام از زیر مجموعه های D_2 داریم:

$$D_{21} = \{2\}$$

$$\text{گام ۱- محاسبه } \Pi_{k=1}^{k=2} \left(\frac{R_{kj}}{r_{kt}} \right) p_k$$

$$\left(\frac{4}{5} \right)^{1.4} \times \left(\frac{3}{6} \right)^{1.167} = 0.326.$$

$$\text{گام ۲- محاسبه } \frac{M_j^q}{T_c}$$

$$\left(\frac{(8,13,20)}{(13,22,33)} \right)^{1.333} = (0.151, 0.496, 0.1776).$$

$$\text{گام ۳- محاسبه } Z_{nm} = \Pi_{k=1}^{k=2} \left(\frac{R_{kj}}{r_{kt}} \right) p_k \times \frac{M_j^q}{T_c}$$

$$Z_{21} = 0.326 \times (0.151, 0.469, 1.776) = (0.0492, 0.162, 0.579).$$

گام ۲ برای زیر مجموعه بعدی تکرار می شود.

$$D_{22} = \{3\}$$

$$Z_{22} = 0.305 \times (0.231, 0.765, 2.649) = (0.705, 0.233, 0.8080).$$

با مقایسه دو عدد فازی Z_{21} و Z_{22} مشخص است که Z_{22} بزرگتر است. بنابراین، چون فعالیت سوم از اولویت بالاتری برخوردار است. بنابراین، زمان بندی می شود.

به طور مشابه با تکرار روند فوق، در مرحله آخر فعالیت ۸ در زمان (۳۲، ۳۳، ۳۴) به پایان می رسد و فعالیت ۹ در زمان (۳۴، ۳۴، ۳۴) وارد مجموعه تصمیم گیری می شود. با توجه به وجود منابع کافی، وارد مجموعه اجرایی شده و زمان بندی می شود. پروژه در زمان (۳۸، ۴۰، ۴۳) به پایان می رسد. در جدول های ۴ و ۵ اطلاعات مربوط به زمان بندی با شیوه موازی آورده شده است. حال با توجه به اطلاعات جدول ۲ مراحل زمان بندی مساله به شیوه زمان بندی سری بیان می شود.

بر اساس جدول ۶ مشاهده می شود که: در همه مراحل فعالیتی که وارد S_n می شود، از D_n انتخاب می شود.

مرحله ۱- $n=1$ فعالیت ۱ در زمان (۰، ۰، ۰) وارد مجموعه D_1 می شود.

جدول ۴- شیوه زمان بندی موازی با معیار شاخص عملکرد زمان بندی مربوط به مثال ۱.

Table 4- Parallel scheduling method with schedule performance index criterion related to Example 1.

n	D _n	A _n	C _n	t _n
1	{1}	{1}	{}	(0,0,0)
2	{2,3}	{3}	{1}	(2,4,6)
3	{2,6,7}	{2,6}	{1,3}	(9,11,13)
4	{4,5,7}	{4,6}	{1,3,2}	(15,16,18)
4	{}	{4}	{1,3,2,6}	(17,19,22)
4	{}	{7}	{1,3,2,6,4}	(20,22,24)
4	{}	{5}	{1,3,2,6,4,7}	(26,27,29)
5	{8}	{8}	{1,3,2,6,4,7,5}	(30,31,32)
6	{9}	{9}	{1,3,2,6,4,7,5,8}	(32,33,34)
7	{}	{}	{1,3,2,6,4,7,5,8,9}	(38,40,43)

جدول ۵- زمان شروع و پایان فعالیت‌ها در شیوه زمان‌بندی موازی مربوط به مثال ۱.

Table 5- Start and end times of activities in the parallel scheduling method for Example 1.

J	ST _j	FT _j
1	(0,0,0)	(2,4,6)
2	(13,13,13)	(15,16,18)
3	(6,6,6)	(9,11,13)
4	(18,18,18)	(20,22,24)
5	(29,29,29)	(30,31,32)
6	(13,13,13)	(17,19,22)
7	(24,24,24)	(26,27,29)
8	(32,32,32)	(32,33,34)
9	(34,34,34)	(38,40,43)

فعالیت ۱ می‌تواند وارد مجموعه S_1 شده و زمان‌بندی شود. با زمان‌بندی شدن فعالیت ۱ فعالیت‌های ۲ و ۳ وارد مجموعه D_2 می‌شوند.

مرحله ۲- $n=2$ در زمان‌بندی سری در هر مرحله پردازش هر فعالیت به تنهایی انجام می‌گیرد. با وجود ورود دو فعالیت به D_2 باید فعالیت با اولویت بالاتر با توجه به رابطه (۵) انتخاب و وارد S_2 شود. برای این منظور مقدار q در همه زیرمجموعه‌ها یکسان است، لذا با توجه به شیوه زمان‌بندی سری و استفاده از الگوریتم ۱ داریم

$$T_B = 44, T_A = 33, T = 33.$$

در ادامه محاسبات مشابه شیوه زمان‌بندی موازی انجام می‌شود. نتایج نهایی در جدول ۶ بیان شده است.

جدول ۶- شیوه زمان‌بندی سری با معیار شاخص عملکرد زمان‌بندی مربوط به مثال ۱.

Table 6- Serial scheduling method with schedule performance index criterion for Example 1.

n	D _n	S _n
1	{1}	{1}
2	{2,3}	{1,3}
3	{2,6,7}	{1,3,2}
4	{4,5,6,7}	{1,3,2,4}
5	{5,6,7}	{1,3,2,4,7}
6	{5,6}	{1,3,2,4,7,5}
7	{6}	{1,3,2,4,7,5,6}
8	{8}	{1,3,2,4,7,5,6,8}
9	{9}	{1,3,2,4,7,5,6,8,9}

۷- نتایج آزمایش‌ها

در این بخش برای سنجش عملکرد مجموعه استاندارد کتابخانه‌ای کولیش فازی با روش پیشنهادی، مسایل آزمون استاندارد کولیش به‌عنوان مبنای مسایل مورد آزمون استفاده می‌شود. در مورد نحوه تولید مسایل آزمون موردنیاز و اجرای آزمایشی و نتایج آن در ادامه بحث خواهد شد.

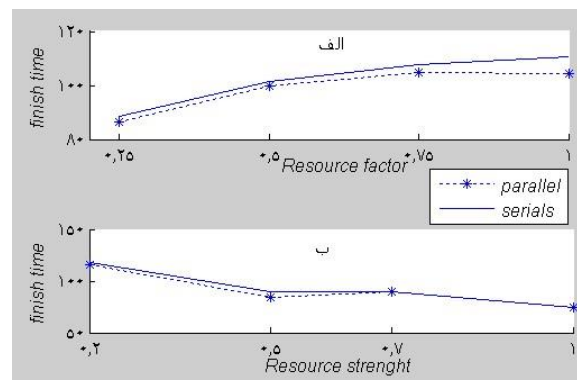
۷-۱- تولید مجموعه فازی

مسایل آزمون برای مسایل $RCPSP$ که زمان پردازش فعالیت‌ها قطعی است، وجود دارد ولی مجموعه‌ای برای این مسایل با زمان پردازش فعالیت فازی در دسترس نیست؛ لذا مجموعه $PSPLIB$ از مسایل آزمون را به‌عنوان مبنا در نظر گرفته و مسایلی با زمان پردازش فازی فعالیت ایجاد می‌کنیم. به این منظور، زمان قطعی پردازش فعالیت موجود در مسایل آزمون را نقطه میانی عدد فازی مثلی در نظر گرفته و حد بالایی عدد فازی را با افزودن ۴۰٪ به عدد میانی و حد پایینی عدد فازی را با کاهش ۳۰٪ از عدد میانی برآورد می‌کنیم. برای به‌دست آوردن عدد صحیح از تابع جزء صحیح برای حد بالا و پایین عدد فازی استفاده می‌شود.

۷-۲- اجرای آزمایشی و نتایج

با توجه به نحوه اجرای دو شیوه زمان بندی سری و موازی با لحاظ کردن قاعده اولویت پیشنهادی، در این بخش به منظور بررسی و ارزیابی تاثیر قاعده اولویت پیشنهادی بر دو شیوه زمان بندی سری و موازی، $PSPLIB$ را به عنوان مبنای مسایل نمونه ای مورد آزمون قرار می دهیم.

مسایل آزمون $PSPLIB$ با توجه به سه پارامتر کنترلی، پیچیدگی شبکه^۱، عامل منبع^۲ و استحکام منبع^۳ تولید و طبقه بندی می شوند. مجموعه مسایل کولیش شامل مسایلی با ۹۰، ۳۰، ۶۰ و ۱۲۰ فعالیت با زمان پردازش و منابع ثابت در طول اجرای پروژه می باشد. در این مقاله مسایل زمان بندی پروژه با $j=30$ فعالیت را به عنوان مبنای کار خود قرار می دهیم. در این مسایل $RF \in \{0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ و استحکام منبع $RS \in \{0.2, 0.1, 0.7, 1\}$ به عنوان دو عامل کنترلی در نظر گرفته شده اند [15]. همچنین شایان ذکر است که نمونه های مورد استفاده از ۴ نوع منبع تجدید پذیر برخوردار هستند.



شکل ۲- مقایسه شیوه زمان بندی موازی و سری با توجه به دو معیار عامل منبع و استحکام منبع.

Figure 2- Comparison of parallel and series scheduling methods according to two criteria: resource factor and resource robustness.

در شکل ۲ سعی شده است که تاثیر شیوه زمان بندی با اولویت جدید بر زمان بندی دسته مسایل نمونه ای استاندارد مورد بررسی قرار گیرد. به این منظور و به منظور ارزیابی دقیق تر و مناسب تر، این دسته مسایل، برحسب معیار پیچیدگی منبع محور شبکه یعنی RF و RS به چهار دسته شکل ۲-الف و به طور مشابه به چهار دسته شکل ۲-ب طبقه بندی شده اند. شایان توجه است این دو معیار و به طور مشابه به چهار دسته پیچیدگی وابسته به منبع، دو معیار مرسوم و شناخته شده در طبقه بندی دسته مسایل نمونه ای کولیش می باشد که بیانگر پیچیدگی و سختی دسته مسایل از لحاظ زمان بندی می باشد. معیار RF بیانگر متوسط مقدار منابع مورد نیاز در هر فعالیت و معیار RS وابستگی مسایل را به میزان منابع مورد نیاز نشان می دهد که در هر مساله هر چه مقدار RF (که کمیتی بین ۰ و ۱ است) به یک نزدیک باشد و هر چه RS (که کمیتی بین ۰ و ۱ است) به صفر نزدیک باشد، وابستگی مساله نسبت به منبع و در نتیجه پیچیدگی نسبت به نحوه زمان بندی بیشتر می شود.

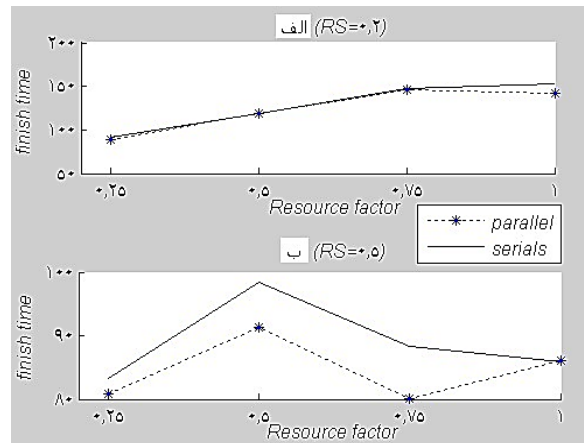
با توجه به مطالب اشاره شده ملاحظه می شود، شکل ۲-الف هر چه میزان RF بیشتر شود (مساله پیچیده تر شود) شیوه زمان بندی موازی نسبت به شیوه زمان بندی سری از عملکرد بهتری برخوردار می شود و اختلاف عملکردی آن ها با ارجحیت موازی افزایش می یابد. نتایج شهودی حاصل برای معیار پیچیدگی RS نیز به طور مشابه صادق است. به عبارت دیگر با کاهش میزان RS یعنی $RS = \{0.2, 0.5\}$ شیوه موازی نسبت به شیوه سری از روند بهتری برخوردار است. بدون در نظر گرفتن دو معیار RF و RS ، در مجموع عملکرد شیوه زمان بندی موازی نسبت به شیوه زمان بندی سری از کیفیت بالاتری برخوردار است.

¹ Network Complexity (NC)

² Resource Factor (RF)

³ Resource Robustness (RS)

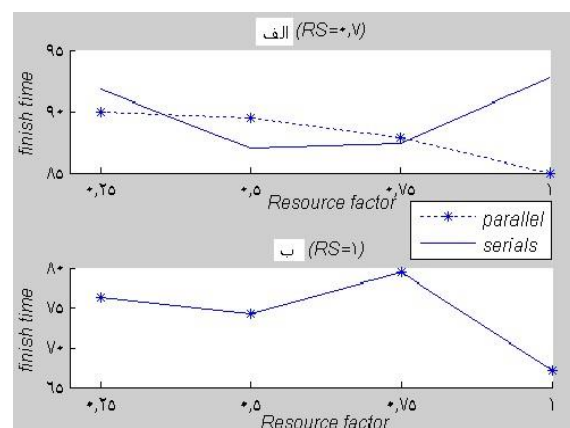
برای ارزیابی دقیق‌تر و مناسب‌تر، کل دسته مسایل استاندارد مورد استفاده بر حسب معیار پیچیدگی RS به چهار دسته $RS = \{0.5, 0.7, 1\}$ به صورت جداگانه طبقه‌بندی شده‌اند (شکل ۳) مشاهده می‌شود هر چه مقدار RS کمتر باشد (وابستگی مسایل به منابع مورد استفاده بیشتر می‌شود) زمان‌بندی فعالیت‌های پروژه دشوارتر خواهد بود. با توجه به این مهم، نتایج شهودی به‌دست آمده با توجه به شکل ۳ را می‌توان به‌صورت ذیل بیان نمود:



شکل ۳- مقایسه دو شیوه زمان‌بندی موازی و سری.

Figure 3- Comparison of two scheduling methods: parallel and serial.

۱. تاثیر نوع شیوه زمان‌بندی بر طول عمر پروژه برای دسته مسایل نمونه‌ای با بیشترین پیچیدگی منبع (یعنی $RS=0.2$) در شکل ۳-الف نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که با افزایش وابستگی مسایل به متوسط تعداد منابع موردنیاز هر پروژه، عملکرد شیوه زمان‌بندی موازی نسبت به شیوه زمان‌بندی سری ارجحیت می‌یابد.
۲. در شکل ۳-ب نیز ملاحظه می‌شود که عملکرد شیوه زمان‌بندی موازی بهتر از شیوه سری است که با توجه به شکل ۲ این مطلب نیز مورد تایید قرار می‌گیرد.



شکل ۴- مقایسه دو شیوه زمان‌بندی موازی و سری.

Figure 4- Comparison of two scheduling methods: Parallel and serial.

۳. در شکل ۴-الف ملاحظه می‌شود که روند عملکردی شیوه زمان‌بندی موازی، همواره یک روند بهبود دهنده دارد و با افزایش RF به‌خصوص $RF=1$ تفاوت عملکردی شیوه‌های موازی و سری با ارجحیت شیوه موازی افزایش می‌یابد.
۴. با توجه به شکل ۴-ب در دسته مسایل نمونه با $RS=1$ (دسته مسایلی که فاقد هرگونه محدودیت منابع می‌باشند)، هر دو شیوه زمان‌بندی سری و موازی از عملکرد یکسانی برخوردارند و هر دو شیوه جواب بهینه را برای هر مساله می‌دهند؛ لذا انتخاب نوع شیوه زمان‌بندی تاثیری در جواب بهینه برای این دسته مسایل ندارد.

با توجه به موارد بندهای ۱ تا ۴ می‌توان نتیجه گرفت که در مجموع شیوه زمان‌بندی موازی از عملکرد بهتری نسبت به شیوه زمان‌بندی سری برخوردار است و به مدیریت پروژه پیشنهاد می‌گردد که شیوه زمان‌بندی موازی را به‌عنوان شیوه زمان‌بندی مبنا مورد استفاده قرار دهد.

۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله مساله زمان‌بندی پروژه با محدودیت منابع و زمان پردازش فازی فعالیت بررسی شد. قانون اولویت جدیدی برای حل مساله پیشنهاد شد که SPI نامیده شد. قاعده اولویت مبتنی بر SPI ، مسیر بحرانی، بحران فعالیت‌ها و منابع موردنیاز فعالیت‌ها را در نظر می‌گیرد. از روش‌های رتبه‌بندی آدامو و یاگر برای مقایسه اعداد فازی استفاده شد. دو شیوه زمان‌بندی سری و موازی با قانون اولویت جدید برای مسایل تخصیص منابع محدود با زمان پردازش فازی بیان شد (زمان شروع و پایان فعالیت‌ها و زمان اتمام پروژه در این مسایل با سطح اعتماد مدیر تغییر می‌کند).

با استفاده از الگوریتم مسیریابی دایجسترا طول مسیر بحرانی شبکه و طول مسیر بحرانی هر فعالیت محاسبه شده است.

هر چه میزان RF بیشتر شود، شیوه زمان‌بندی موازی نسبت به شیوه زمان‌بندی سری از عملکرد بهتری برخوردار می‌شود و اختلاف عملکردی آن‌ها با ارجحیت موازی افزایش می‌یابد و نیز با کاهش میزان RS شیوه موازی نسبت به شیوه سری از روند بهتری برخوردار می‌شود. نتایج عددی نشان می‌دهند که در مجموع بدون در نظر گرفتن دو معیار RS و RF ، عملکرد شیوه زمان‌بندی موازی نسبت به شیوه زمان‌بندی سری از کیفیت بالاتری برخوردار است.

حل مسایل $RCPSP$ با پردازش فازی فعالیت، با روش‌های دیگری می‌تواند تعمیم یابد. این تحقیق فقط به جنبه فازی بودن مدت زمان پردازش فعالیت توجه می‌نماید. در دنیای واقعی پارامترهای دیگری ممکن است مبهم باشند، می‌توان تعداد منابع را نیز غیرقطعی بیان نمود تا انعطاف‌پذیری بیشتری در داده‌های ورودی داشته باشیم که تعمیم جالبی از این تحقیق است [16].

منابع

- [1] Long, L. D., & Ohsato, A. (2008). Fuzzy critical chain method for project scheduling under resource constraints and uncertainty. *International journal of project management*, 26(6), 688–698. <https://doi.org/10.1016/j.ijproman.2007.09.012>
- [2] Bhaskar, T., Pal, M. N., & Pal, A. K. (2011). A heuristic method for RCPSP with fuzzy activity times. *European journal of operational research*, 208(1), 57–66. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2010.07.021>
- [3] Ma, W., Che, Y., Huang, H., & Ke, H. (2016). Resource-constrained project scheduling problem with uncertain durations and renewable resources. *International journal of machine learning and cybernetics*, 7(4), 613–621. <https://doi.org/10.1007/s13042-015-0444-4>
- [4] Tariqian, H. (2016). *Project planning and control (Concepts and methods)*. (In Persian). Ferdowsi University of Mashhad. <https://B2n.ir/yh9707>
- [5] Taheri, M. (1996). *Introduction to fuzzy set theory*. (In Persian). Mashhad University Jihad. <https://B2n.ir/jg9377>
- [6] Zimmermann, H. J. (2011). *Fuzzy set theory—and its applications*. Springer Science & Business Media. <https://B2n.ir/zg8179>
- [7] Kaufmann, A., & Gupta, M. M. (1991). *Introduction to fuzzy arithmetic: Theory and applications*. Van Nostrand Reinhold Company. <https://B2n.ir/pg8958>
- [8] Hosseini, A., & Baharanchi, D. (2004). *Management and control*. (In Persian). Jahan Jam Jam. <https://B2n.ir/es5053>
- [9] Rezaei, M., & Ghazanfari, M. (2006). *Introduction to Fuzzy Set Theory*. (In Persian). Ran University of Science and Technology. <https://B2n.ir/dm8591>
- [10] Wang, X., & Kerre, E. E. (2001). Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I). *Fuzzy sets and systems*, 118(3), 375–385. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(99\)00062-7](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(99)00062-7)
- [11] Wang, X., & Kerre, E. E. (2001). Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (II). *Fuzzy sets and systems*, 118(3), 387–405. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(99\)00063-9](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(99)00063-9)
- [12] Chen, S. H. (1985). Ranking fuzzy numbers with maximizing set and minimizing set. *Fuzzy sets and systems*, 17(2), 113–129. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(85\)90050-8](https://doi.org/10.1016/0165-0114(85)90050-8)
- [13] Korepazan Dezfuli, A. (2005). *Principles of fuzzy set theory and its application in modeling water engineering problems*. (In Persian). Jihad University Branch of Amirkabir University of Technology. <https://B2n.ir/qf9085>
- [14] Corman, T. H., Leiserson, CH, E., Rivest, R. L., & Stein, C. (2008). *Introduction to algorithms*. Computer Science Publications. <https://B2n.ir/rp5087>
- [15] Hartmann, S., & Kolisch, R. (2000). Experimental evaluation of state-of-the-art heuristics for the resource-constrained project scheduling problem. *European journal of operational research*, 127(2), 394–407. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(99\)00485-3](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(99)00485-3)
- [16] Knyazeva, M., Bozhenyuk, A., & Rozenberg, I. (2015). Resource-constrained project scheduling approach under fuzzy conditions. *Procedia computer science*, 77, 56–64. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.12.359>